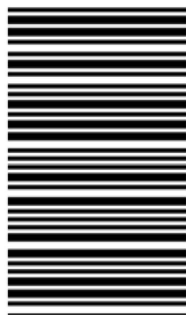


کد کنترل

690A



690A

صبح جمعه

۱۴۰۴/۱۱/۱۰

دفترچه شماره ۲ از ۲



جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان بنیاد آموزش کشور

«علم و تحقیق، کلید پیشرفت کشور است.»

مقام معظم رهبری

آزمون ورودی دوره‌های دکتری (نیمه‌متمرکز) – سال ۱۴۰۵  
ریاضی (کد ۲۲۳۳)

مدت زمان پاسخ‌گویی: ۱۳۵ دقیقه

تعداد سؤال: ۷۵ سؤال

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤال‌ها

| ردیف | مواد امتحانی                                                      | تعداد سؤال | از شماره | تا شماره |
|------|-------------------------------------------------------------------|------------|----------|----------|
| ۱    | مبانی علوم ریاضی – مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی – مبانی آنالیز ریاضی | ۱۵         | ۱        | ۱۵       |
| ۲    | مبانی آنالیز عددی – مبانی احتمال – بهینه‌سازی خطی                 | ۱۰         | ۱۶       | ۲۵       |
| ۳    | مبانی جبر – توپولوژی                                              | ۱۰         | ۲۶       | ۳۵       |
| ۴    | آنالیز حقیقی ۱                                                    | ۱۰         | ۳۶       | ۴۵       |
| ۵    | جبر پیشرفته ۱                                                     | ۱۰         | ۴۶       | ۵۵       |
| ۶    | بهینه‌سازی خطی پیشرفته ۱ – آنالیز عددی پیشرفته                    | ۱۰         | ۵۶       | ۶۵       |
| ۷    | اصول آموزش ریاضی                                                  | ۱۰         | ۶۶       | ۷۵       |

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

\* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات کادر زیر، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب ..... با شماره داوطلبی ..... با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤالات، نوع و کدکنترل درج شده بر روی جلد دفترچه سؤالات و پایین پاسخنامه را تأیید می‌نمایم.

امضا:

مبانی علوم ریاضی - مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی - مبانی آنالیز ریاضی:

۱- فرض کنید  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌های  $X$  باشند. تفاضل متقارن  $A$  و  $B$  با ضابطه  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

تعریف می‌شود. گزاره‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

الف -  $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B)$

ب -  $x \in A \Leftrightarrow x \in B$

ج -  $x \in A \cap B$

د -  $x \notin A \cup B$

کدام گزاره معادل گزاره  $x \notin A \Delta B$  است؟

(۱) فقط «الف»

(۲) فقط «الف» و «ب»

(۳) فقط «الف» و «ج»

(۴) فقط «ب» و «د»

۲- رابطه مسن‌تری بین انسان‌ها کدام‌یک از ویژگی‌های زیر را دارد؟ البته با تعریف زیر:

«در مجموعه انسان‌ها گوییم  $x$  از  $y$  مسن‌تر است اگر سن  $x$  بزرگ‌تر یا مساوی سن  $y$  باشد.»

(۱) متعدی است ولی پادمتقارن نیست.

(۲) بازتابی و پادمتقارن است.

(۳) متقارن و متعدی است.

(۴) متعدی است ولی بازتابی نیست.

۳- فرض کنید  $f: \mathbb{N} \rightarrow X$  یک تابع باشد. گزاره‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$p: \exists K \subseteq \mathbb{N} (|K| = \aleph_0 \wedge \forall k, k' \in K: f(k) = f(k'))$

$q: \exists K \subseteq \mathbb{N} (|K| = \aleph_0 \wedge \forall k, k' \in K (k \neq k' \Rightarrow f(k) \neq f(k'))$

از گزاره‌های  $p \vee q$  و  $p \Rightarrow \sim q$  کدام درست است؟

(۱) فقط  $p \vee q$

(۲) فقط  $p \Rightarrow \sim q$

(۳) هر دو

(۴) هیچ‌کدام

۴- فرض کنید  $f: X \rightarrow Y$  یک تابع باشد. گزاره‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

الف -  $\forall A \subseteq X : f(A^c) = (f(A))^c$

ب -  $\forall B \subseteq Y : f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$

کدام گزینه درست است؟

(۱) شرط کافی برای «ب» آن است که  $f$  پوشا باشد و شرط کافی برای «الف» آن است که  $f$  یک‌به‌یک باشد.

(۲) شرط لازم برای «ب» آن است که  $f$  یک‌به‌یک باشد و شرط کافی برای «الف» آن است که  $f$  پوشا باشد.

(۳) «ب» درست است و شرط لازم و کافی برای «الف» آن است که  $f$  دوسویی باشد.

(۴) شرط لازم برای «ب» آن است که  $f$  پوشا باشد و شرط لازم برای «الف» آن است که  $f$  یک‌به‌یک باشد.

۵- فرض کنید  $\aleph_0$  و  $\aleph_1$  به ترتیب، اعداد اصلی مجموعه‌های  $\mathbb{N}$  و  $\mathbb{R}$  باشند. کدام گزینه فرض پیوستار را بیان نمی‌کند؟

(۱) هیچ عدد اصلی وجود ندارد که اکیداً از  $\aleph_1$  بزرگ‌تر و اکیداً از  $\aleph_0$  کوچک‌تر باشد.

(۲) عدد اصلی هر زیرمجموعه نامتناهی از اعداد حقیقی برابر  $\aleph_0$  است.

(۳) هر زیرمجموعه نامتناهی  $\mathbb{R}$  یا شمارا یا هم‌عدد با  $\mathbb{R}$  است.

(۴) بین  $\aleph_0$  و  $\aleph_1$  هیچ عدد اصلی دیگری وجود ندارد.

۶- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  در این صورت مجموع مقادیر ویژه  $A^2$  کدام است؟

(۱) ۲۰

(۲) ۱۵

(۳) ۱۰

(۴) ۶

۷- اگر  $P_A(x) = x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 3x + 3$  چند جمله‌ای مشخصه ماتریس  $A$  باشد، آنگاه چند جمله‌ای مشخصه

ماتریس  $A^{-1}$  کدام است؟

(۱)  $P_{A^{-1}}(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

(۲)  $P_{A^{-1}}(x) = x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

(۳)  $P_{A^{-1}}(x) = x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 3x^4 + 3$

(۴)  $P_{A^{-1}}(x) = x^5 - x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}$

۸- ماتریس‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

در این صورت، کدام مورد درست است؟

(۲) ماتریس‌های  $C$  و  $D$  متشابه هستند.

(۱) ماتریس‌های  $A$  و  $B$  متشابه هستند.

(۴) ماتریس‌های  $E$  و  $F$  متشابه نیستند.

(۳) ماتریس‌های  $E$  و  $G$  متشابه هستند.

- ۹- تبدیل خطی  $T: M_7(\mathbb{R}) \rightarrow M_7(\mathbb{R})$  با ضابطه  $T(A) = A^t - A$  را در نظر می‌گیریم ( $A^t$  ترانپوذه  $A$  است). در این صورت  $\dim \ker(T)$  کدام است؟

(۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) ۳

- ۱۰- فرض کنید  $V$  فضای همه ماتریس‌های حقیقی  $2 \times 2$  و متقارن باشد. تبدیل خطی  $T: V \rightarrow V$  با تعریف  $T(X) = AX + XA^t$  را در نظر بگیرید که در آن  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . بعد فضای تصویر  $T$  کدام است؟

(۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

- ۱۱- فرض کنید  $A$  مجموعه‌ای کراندار در  $\mathbb{R}$  مجهز به متریک اقلیدسی است. کدام گزینه نادرست است؟  
(۱)  $\bar{A}$  (بستار  $A$ ) فشرده است.

(۲) کوچک‌ترین بازه باز شامل  $A$  وجود دارد.

(۳) کوچک‌ترین بازه بسته شامل  $A$  وجود دارد.

(۴) هر دنباله در  $A$  زیردنباله همگرا دارد.

- ۱۲- اگر  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  و  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  دو دنباله از اعداد حقیقی باشند، کدام گزینه درست است؟

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\max\{a_n, b_n\}) = \max\left\{\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n\right\} \quad (۱)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\min\{a_n, b_n\}) = \min\left\{\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n\right\} \quad (۲)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\max\{a_n, b_n\}) = \min\left\{\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n\right\} \quad (۳)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\max\{a_n, b_n\}) = \max\left\{\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n\right\} \quad (۴)$$

- ۱۳- کدام گزینه مشتق یک تابع بر  $\mathbb{R}$  است؟

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (۱)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{100}-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases} \quad (۲)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (۳)$$

$$f(x) = [x], \text{ که } [x] \text{ جزء صحیح } x \text{ است.} \quad (۴)$$

۱۴- کدام گزاره با همگرایی مطلق سری  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  معادل است؟

الف - سری  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرا و نسبت به تجدید آرایش پایا است.

ب - به ازای هر دنباله  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  در  $\{0, 1\}$ ، سری  $\sum_{n=1}^{\infty} s_n a_n$  همگرا است.

(۱) فقط «الف» (۲) فقط «ب»

(۳) «الف» و «ب» (۴) هیچ کدام از «الف» و «ب»

۱۵- فرض کنید  $f, g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  توابعی باشند که  $g$  پیوسته و دوسویی است و  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . گزاره‌های

زیر را در نظر می‌گیریم:

الف -  $\lim_{x \rightarrow \infty} fog(x) = \infty$

ب -  $\lim_{x \rightarrow \infty} gof(x) = \infty$

کدام گزینه درست است؟

(۱) «الف» و «ب» هر دو درست هستند. (۲) «الف» درست است ولی «ب» لزوماً درست نیست.

(۳) «ب» درست است ولی «الف» لزوماً درست نیست. (۴) هیچ کدام از «الف» و «ب» لزوماً درست نیست.

مبانی آنالیز عددی - مبانی احتمال - بهینه‌سازی خطی:

۱۶- کدام دنباله بازگشتی زیر، برای یافتن کوچک‌ترین ریشه مثبت معادله  $x^3 + x - 1 = 0$ ، با انتخاب  $x_0 = 0.5$  با توجه به مرتبه همگرایی آن، مناسب‌تر است؟

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2 + 1} \quad (1)$$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1} \quad (2)$$

$$x_{n+1} = 1 - x_n^3 \quad (3)$$

$$x_{n+1} = x_n^3 + 2x_n - 1 \quad (4)$$

۱۷- از نقطه آغازین  $(x_0, y_0) = (0, 1)$  برای یافتن جواب دستگاه معادلات غیرخطی  $\begin{cases} x^2 + y^3 = 2 \\ xy + 1 = 0 \end{cases}$  به روش تکرار

نیوتن استفاده می‌کنیم. تقریب مقدار  $x$  در اولین تکرار کدام است؟

(۱) -۱

(۲) -۰.۵

(۳) ۰.۵

(۴) ۱

۱۸- تابع جدولی  $\{(1, 2), (1/001, 2/004), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$  مفروض است. برای محاسبه چندجمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی از یک ماشین حساب که با دقت دو رقم اعشاری کار می‌کند، استفاده می‌کنیم. مقدار چندجمله‌ای درون‌یاب به ازای  $x = 2/1$  کدام است؟

(۱)  $3/8$

(۲)  $4/13$

(۳)  $4/2$

(۴)  $4/23$

۱۹- مشتق اول تابع  $f \in C^2[-3, 3]$  را با مشتق‌گیری از چندجمله‌ای درون‌یاب تابع  $f$ ، در نقاط  $x = -1, 0, 2$  تقریب زده و می‌یابیم:  $f'(0) \approx -\frac{2}{3}f(-1) + \alpha f(0) + \beta f(2)$ . مقدار  $\frac{1}{\alpha\beta}$  کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۶

(۳) ۹

(۴) ۱۲

۲۰- در ظرفی ۳ مهره سفید و ۶ مهره سیاه وجود دارد. دو بازیکن A و B به نوبت و با جایگذاری به‌طور تصادفی از جعبه مهره انتخاب می‌کنند. A بازی را شروع می‌کند و اولین بازیکنی که مهره سفید استخراج کند برنده است. احتمال اینکه A برنده شود، چقدر است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$

(۲)  $\frac{2}{3}$

(۳)  $\frac{3}{5}$

(۴)  $\frac{2}{5}$

۲۱- یک ظرف شامل n توپ قرمز و m توپ سفید است. توپ‌ها به تصادف و بدون جایگذاری از ظرف انتخاب می‌شوند. احتمال اینکه برای رسیدن به r توپ قرمز، k انتخاب لازم باشد کدام است؟

$$\frac{n}{k} \times \frac{\binom{n-1}{r-1} \binom{m}{k-r}}{\binom{n+m}{k}} \quad (۲)$$

(۱)  $\frac{k}{n+m}$

$$\frac{\binom{n-1}{r-1} \binom{m}{k-r}}{\binom{n+m}{k}} \quad (۴)$$

(۳)  $\frac{\binom{n}{r} \binom{m}{k-r}}{\binom{n+m}{k}}$

۲۲- دو ظرف شماره (۱) و (۲) به ترتیب دارای ۳ مهره آبی و ۴ مهره قرمز در مقابل ۳ مهره قرمز و ۴ مهره آبی هستند. از ظرف شماره (۱) دو مهره به تصادف انتخاب کرده و به ظرف شماره (۲) منتقل می‌کنیم. سپس دو مهره به تصادف از ظرف شماره (۲) انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه لااقل یک مهره قرمز از ظرف (۲) انتخاب شود، کدام است؟

$$\begin{array}{r} \frac{555}{36 \times 21} \quad (1) \\ \frac{141}{36 \times 21} \quad (2) \\ \frac{201}{36 \times 21} \quad (3) \\ \frac{342}{36 \times 21} \quad (4) \end{array}$$

۲۳- یک شرکت، دو کارخانه  $F_1$  و  $F_2$  و سه انبار  $W_1$ ،  $W_2$  و  $W_3$  دارد. ظرفیت تولید کارخانه‌های  $F_1$  و  $F_2$  به ترتیب ۸۰ و ۷۰ واحد و ظرفیت انبارهای  $W_1$ ،  $W_2$  و  $W_3$  نیز به ترتیب ۵۰، ۶۰ و ۴۰ واحد است. به دلیل آن که کارخانه‌ها هیچ ظرفیتی برای نگهداری محصول تولید شده ندارند، باید محصولات فوراً به انبارها منتقل شوند. هم‌چنین باید از تمام ظرفیت انبارها استفاده کرد. اگر  $x_{ij}$  مقدار حمل از کارخانه  $i$  به انبار  $j$  باشد، آنگاه کدام مورد محدودیت مربوط به ظرفیت کارخانه  $F_1$  را نمایش می‌دهد؟

$$\begin{array}{l} (1) \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} = 80 \\ (2) \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 80 \\ (3) \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80 \\ (4) \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 80 \end{array}$$

۲۴- مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر مفروض است. کدام موارد درست‌اند؟

الف - اگر یک نقطه رأسی، بهینه باشد، آنگاه ممکن است برای یک متغیر غیر پایه‌ای  $x_j$  داشته باشیم:  $z_j - c_j > 0$ .  
ب - اگر برداری مانند  $d$  موجود باشد که  $Ad = 0$ ،  $d \geq 0$  و  $cd > 0$ ، آنگاه مسئله جواب بهینه متناهی دارد.  
ج - اگر  $\bar{x}$  جواب بهینه باشد، آنگاه  $\bar{x}$  می‌تواند بیش از  $m$  مؤلفه مخالف صفر داشته باشد.

$$\begin{array}{ll} \text{Max } z = cx & (1) \text{ «ب»} \\ \text{s.t : } A_{m \times n} x = b & (2) \text{ «الف» و «ب»} \\ x \geq 0 & (3) \text{ «الف» و «ج»} \\ & (4) \text{ «ب» و «ج»} \end{array}$$

۲۵- جدول بهینه مسئله برنامه ریزی خطی زیر، مفروض است:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{s.t. } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &\leq b_2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

|       | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | RHS |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| Z     | ۱ | ۰     | -۳    | -۳    | -۲    | ۰     | -۱۶ |
| $x_1$ | ۰ | ۱     | ۲     | ۱     | ۱     | ۰     | ۸   |
| $x_5$ | ۰ | ۰     | ۳     | -۱    | ۱     | ۱     | ۱۲  |

که در آن، متغیرهای  $x_4$  و  $x_5$  به ترتیب متغیرهای کمکی محدودیت‌های اول و دوم است. دوگان (ثانویه) این مسئله کدام است؟

$$\begin{aligned} \text{Max } w &= ۸y_1 - ۴y_2 \\ \text{s.t. } y_1 - y_2 &\leq ۲ \\ ۲y_1 + y_2 &\leq ۱ \quad (۱) \\ y_1 + ۲y_2 &\leq ۱ \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } w &= ۸y_1 + ۴y_2 \\ \text{s.t. } y_1 - y_2 &\leq -۲ \\ ۲y_1 + y_2 &\leq -۱ \quad (۲) \\ y_1 - ۲y_2 &\leq ۱ \\ y_1, y_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } w &= ۴y_1 + ۸y_2 \\ \text{s.t. } -y_1 + y_2 &\leq ۲ \\ y_1 + ۲y_2 &\leq -۱ \quad (۳) \\ -y_1 + ۲y_2 &\leq -۱ \\ y_1, y_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } w &= ۸y_1 + ۴y_2 \\ \text{s.t. } y_1 + y_2 &\leq ۲ \\ ۲y_1 + y_2 &\leq -۱ \quad (۴) \\ y_1 + ۲y_2 &\leq ۱ \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

۲۶- فرض کنید  $\mathbb{Z}[x]$  حلقه چندجمله‌ای‌ها با ضرایب صحیح باشد. قرار می‌دهیم:

$$I = \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid f(-2) = 0\}.$$

در این صورت کدام مورد صحیح است؟

(۱)  $I$  یک ایده‌آل اول  $\mathbb{Z}[x]$  نیست.

(۲)  $I$  یک ایده‌آل اول  $\mathbb{Z}[x]$  است و داریم  $\frac{\mathbb{Z}[x]}{I} \cong \mathbb{Z}$

(۳)  $I$  یک ایده‌آل ماکسیمال  $\mathbb{Z}[x]$  است و داریم  $\frac{\mathbb{Z}[x]}{I} \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

(۴)  $I$  یک ایده‌آل ماکسیمال  $\mathbb{Z}[x]$  است و داریم  $\frac{\mathbb{Z}[x]}{I} \cong \mathbb{Q}$

۲۷- فرض کنید که  $G$  یک گروه دوری است که فقط دارای یک مولد است. کدام گزاره زیر در مورد تعداد اعضای  $G$  درست است؟

(۱)  $G = \{e\}$

(۲)  $G$  یک گروه دوری نامتناهی است.

(۳)  $G$  حداکثر دارای دو عضو است.

(۴)  $G \cong \mathbb{Z}_2$

۲۸- کدام یک از مجموعه‌های زیر، ایده‌آل  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  است؟

(۱)  $\{(2m, 0) \mid m \in \mathbb{Z}\}$

(۲)  $\{(m, m) \mid m \in \mathbb{Z}\}$

(۳)  $\{(2m, 2m) \mid m \in \mathbb{Z}\}$

(۴)  $\{(m, -m) \mid m \in \mathbb{Z}\}$

۲۹- کدام گزاره زیر در مورد گروه از مرتبه  $1405$  درست است؟

(۱)  $G$  گروهی ساده است.

(۲)  $G$  گروهی دوری است.

(۳)  $G$  زیرگروهی از مرتبه  $280$  دارد.

(۴)  $G$  دارای زیرگروه سیلوی نرمالی است.

۳۰- حلقه  $\frac{\mathbb{Z}_5[x]}{\langle x^3 - 1 \rangle}$  چند خودتوان دارد؟

(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) ۸

۳۱- فرض کنید  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  مجهز به توپولوژی زیر باشد:

$$\tau = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 5\}\}$$

اگر  $A = \{1, 2, 3\}$ ، آنگاه کدام مورد درست است؟

$$(1) \quad A^\circ = \emptyset \text{ و } (A^c)^\circ = \{1, 2\}$$

$$(2) \quad A^\circ = \{1, 2\} \text{ و } (A^c)^\circ = \emptyset$$

$$(3) \quad A^\circ = (A^c)^\circ = \emptyset$$

$$(4) \quad A^\circ = (A^c)^\circ = \{1, 2\}$$

۳۲- فرض کنید  $X = \mathbb{Q}$  مجهز به توپولوژی زیر باشد:

$$\tau = \left\{ B^c : B \subseteq X : \frac{1}{p} \notin B \text{ یا } \frac{1}{p} \in B \right\}$$

اگر  $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ ، آنگاه  $\partial A$  کدام است؟

$$(1) \quad A \cup \{0\}$$

$$(2) \quad A$$

$$(3) \quad A \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$(4) \quad \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

۳۳- فرض کنید  $X$  و  $Y$  دوفضای توپولوژیک و  $f: X \rightarrow Y$  یک نگاشت باز و پوشا باشد. اگر

$$\{(u, v) \in X \times X : f(u) = f(v)\}$$

(۱)  $Y$  هاوسدورف است، ولی  $X$  لزوماً هاوسدورف نیست.

(۲)  $X$  هاوسدورف است، ولی  $Y$  لزوماً هاوسدورف نیست.

(۳)  $X$  و  $Y$  هاوسدورف هستند.

(۴)  $X$  و  $Y$  لزوماً هاوسدورف نیستند.

۳۴- فرض کنید  $X = [-1, 1]$  و  $\tau$  توپولوژی روی  $X$  تولید شده توسط  $\{(a, 1] : a < 0\} \cup \{[-1, b) : b > 0\}$  باشد. اگر

$$(x_n)_{n=1}^\infty \text{ را دنباله } (0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \dots) \text{ در نظر بگیریم، آنگاه کدام مورد درست است؟}$$

$$(1) \quad (x_n)_{n=1}^\infty \text{ همگرا به صفر است.}$$

$$(2) \quad (x_n)_{n=1}^\infty \text{ همگرا به } \frac{1}{4} \text{ است.}$$

$$(3) \quad (x_n)_{n=1}^\infty \text{ همگرا به } \frac{1}{2} \text{ است.}$$

$$(4) \quad (x_n)_{n=1}^\infty \text{ همگرا نیست.}$$

۳۵- فرض کنید  $X$  یک فضای توپولوژیک باشد که به ازای هر دو نقطه متمایز  $x, y \in X$ ، مجموعه بازی شامل  $x$  مانند

$U$  موجود است به طوری که  $y \notin U$ . کدام مورد درست نیست؟

(۱) توپولوژی  $X$  ظریف تر از توپولوژی متمم متناهی در  $X$  است.

(۲) برای هر  $x \in X$ ،  $X \setminus \{x\}$  باز است.

(۳) هر زیرمجموعه متناهی  $X$ ، بسته است.

(۴)  $X$  هاوسدورف است.

۳۶- فرض کنید  $(X, \mu)$  یک فضای اندازه و  $\mu^*$  اندازه خارجی تولیدشده توسط  $\mu$  باشد. اگر  $A, B \subseteq X$  به طوری که

$$\mu^*(A \Delta B) = 0$$

(۱)  $A \cap B$  اندازه پذیر است.

(۲)  $A \setminus B$  اندازه پذیر است.

(۳)  $B \setminus A$  اندازه پذیر است.

(۴)  $A$  اندازه پذیر است اگر و تنها اگر  $B$  اندازه پذیر است.

۳۷- کدام یک از زیر مجموعه های  $E$  از  $\mathbb{R}$ ، لزوماً بورل نیست؟

(۱)  $E = \{x \in \mathbb{R} : \limsup_{n \rightarrow \infty} \chi_{B_n}(x) > a\}$  که  $a \in \mathbb{R}$  و  $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$  دنباله ای از زیر مجموعه های بورل  $\mathbb{R}$  است.

(۲)  $E = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{Q}\}$  که  $f$  تابعی پیوسته بر  $\mathbb{R}$  است.

(۳)  $E = \{x \in \mathbb{R} : 1 < f(x) \leq 2\}$  که  $f$  تابعی پیوسته بر  $\mathbb{R}$  است.

(۴)  $B_1 \subseteq E \subseteq B_2$  که  $B_1$  و  $B_2$  مجموعه های بورل هستند و  $\lambda(B_2 \setminus B_1) = 0$  که  $\lambda$  اندازه لیگ روی  $\mathbb{R}$  است.

۳۸- فرض کنید  $\{E_n\}$  دنباله ای از مجموعه های اندازه پذیر در فضای اندازه  $(X, \mu)$  باشد و  $\varepsilon > 0$  به طوری که برای هر

$n$ ،  $\mu(E_n) \geq \varepsilon$  و  $\{x \in X : \text{تعلق دارد } E_n\}$ ،  $F = \{x \in X : \text{تعلق دارد } E_n\}$ ، کدام مورد درست است؟

(۱) اگر  $\mu(X) < \infty$  آنگاه  $F$  اندازه پذیر است و  $\varepsilon \leq \mu(F) < \infty$ .

(۲) اگر  $\mu(X) < \infty$  آنگاه  $F$  اندازه پذیر است و  $\mu(F) = 0$ .

(۳)  $F$  اندازه پذیر است و  $\mu(F) = \infty$ .

(۴)  $F$  لزوماً اندازه پذیر نیست.

۳۹- اگر  $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ n & x \in \mathbb{Q}^c \cap [0, 1], 10^{-(n+1)} \leq x < 10^{-n} \end{cases}$  و  $\lambda$  اندازه لیگ روی  $\mathbb{R}$  باشد، درباره انتگرال لیگ

$$\int_{[0,1]} f d\lambda$$

کدام مورد درست است؟

(۱) در  $\mathbb{R}$  موجود نیست.

(۲) موجود و مقدار آن برابر ۱ است.

(۳) موجود و مقدار آن برابر  $\frac{1}{9}$  است.

(۴) موجود و مقدار آن برابر  $\frac{1}{10}$  است.

۴۰- فرض کنیم  $\mathbb{R}$  مجهز به اندازه لیگ و تابع اندازه پذیر  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  بر هر بازه  $[a, b]$  انتگرال پذیر ریمان است

$$A = \left\{ \int_a^b f(x) dx : -\infty < a < b < \infty \right\}$$

و گزاره های زیر را در نظر بگیرید:

الف - انتگرال پذیر لیگ است. ب - کراندار است.

کدام مورد درست است؟

(۱) «الف» نه شرط لازم برای «ب» است و نه شرط کافی.

(۲) «الف» شرط لازم و کافی برای «ب» است.

(۳) اگر «الف» آنگاه «ب» ولی عکس آن لزوماً برقرار نیست.

(۴) اگر «ب» آنگاه «الف» ولی عکس آن لزوماً برقرار نیست.

۴۱- فرض کنید  $(X, \mu)$  یک فضای اندازه متناهی،  $1 < p < \infty$  و برای هر  $n$  تابع  $f_n$  و تابع  $f$  اندازه پذیر باشند. گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید.

- الف- اگر  $f_n \rightarrow f$  در  $L^p(\mu)$ ، آنگاه  $f_n \rightarrow f$  در اندازه  $\mu$ .  
 ب- اگر  $f_n \rightarrow f$  در اندازه  $\mu$  آنگاه زیر دنباله‌ای مانند  $\{f_{n_k}\}$  یافت می‌شود که  $f_{n_k} \rightarrow f$  تقریباً همه جا بر  $X$ .  
 ج- اگر  $f_n \rightarrow f$  تقریباً همه جا بر  $X$ ، آنگاه  $f_n \rightarrow f$  در اندازه  $\mu$ .  
 د- اگر  $f_n \rightarrow f$  در اندازه  $\mu$ ، آنگاه  $f_n \rightarrow f$  در  $L^p(\mu)$ .  
 کدام مورد درست است؟

(۲) فقط «ب» و «ج»

(۱) فقط «الف» و «ب»

(۴) همه گزاره‌های «الف» تا «د»

(۳) فقط «الف»، «ب» و «ج»

۴۲- فرض کنید  $\{E \text{ یا } E^c \text{ حداکثر شمارا است. } S = \{E \subseteq \mathbb{R} : \mu(E) = 0\}$  برای  $E \in S$ ، اگر  $E$  حداکثر شمارا باشد،  $\mu(E) = 0$  و

اگر  $E^c$  حداکثر شمارا باشد،  $\mu(E) = 1$  تعریف می‌شود. در فضای اندازه  $(\mathbb{R}, S, \mu)$  کدام مورد نادرست است؟

(۲) هر تابع پیوسته بر  $\mathbb{R}$ ،  $\mu$ -اندازه پذیر است.

(۱) هر تابع  $\mu$ -اندازه پذیر، انتگرال پذیر است.

(۴) تابع مشخصه  $\chi_{[0,1]}$ ،  $\mu$ -اندازه پذیر نیست.

(۳) هر تابع ساده تقریباً همه جا ثابت است.

۴۳- فرض کنید  $(X, \mu)$  یک فضای اندازه باشد و  $L = L^1(\mu) \cap L^2(\mu)$ . کدام مورد درست است؟

(۱) فضای  $L$  با نرم  $\|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2$  کامل است اگر  $\mu^*(X) < \infty$ .

(۲) فضای  $L$  با نرم  $\|\cdot\|_1$  کامل است اگر  $\mu^*(X) < \infty$ .

(۳) فضای  $L$  با نرم  $\|\cdot\|_1$  کامل است.

(۴) فضای  $L$  با نرم  $\|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2$  کامل است.

۴۴- فرض کنید  $(X, \mu)$  فضای اندازه باشد و  $f, g \in L^1(\mu)$ . کدام مورد نادرست است؟

(۱)  $(f^2 + g^2)^{\frac{1}{2}} \in L^1(\mu)$ .

(۲)  $|fg|^{\frac{1}{2}} \in L^1(\mu)$ .

(۳)  $|f|^p |g|^q \in L^1(\mu)$  که  $p+q=1$  و  $p, q > 0$ .

(۴)  $|f|^p + |g|^q \in L^1(\mu)$  که  $p+q=1$  و  $p, q > 0$ .

۴۵- عملگر خطی  $T: (\ell^2, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\ell^2, \|\cdot\|_2)$  را با ضابطه  $T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) = \left(\alpha_1, \frac{\alpha_2}{2}, \frac{\alpha_3}{3}, \dots\right)$  در نظر

بگیرید. کدام مورد درست است؟

(۱)  $\|T\| = 1$ .

(۲)  $\|T\| < 1$ .

(۳)  $1 < \|T\| < \infty$ .

(۴)  $T$  بی کران است.

- ۴۶- اگر  $F$  یک میدان باشد، آنگاه هر  $F$  - مدول کدام است؟  
 (۱) تصویری است اما آزاد و اینژکتیو (تزریقی) نیست.  
 (۲) اینژکتیو (تزریقی) و تصویری است اما آزاد نیست.  
 (۳) آزاد و تصویری است اما اینژکتیو (تزریقی) نیست.  
 (۴) اینژکتیو (تزریقی)، تصویری و آزاد است.
- ۴۷- در کدام مورد،  $\mathbb{Z}$  - مدول داده شده یکدست است ولی تصویری نیست؟  
 (۱)  $\mathbb{Q}$   
 (۲)  $\mathbb{Z}_2$   
 (۳)  $\mathbb{Z}$   
 (۴)  $\mathbb{Q}$  و  $\mathbb{Z}_2$
- ۴۸- کدام مورد برای حلقه ماتریس های  $2 \times 2$  بالامثلثی با درایه های گویا، درست است؟  
 (۱) هم نوتری راست و هم آرتینی راست است.  
 (۲) آرتینی راست است، اما نوتری راست نیست.  
 (۳) نوتری راست است، اما آرتینی راست نیست.  
 (۴) نه نوتری راست و نه آرتینی راست است.
- ۴۹- کدام مورد با گروه آبدی  $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x]$  یکرخت است؟  
 (۱)  $\mathbb{Z}_2$   
 (۲)  ${}_2\mathbb{Z}[x]$   
 (۳)  $\mathbb{Z}_2[x]$   
 (۴) صفر
- ۵۰- مدول زیر، به عنوان  $\mathbb{Z}$  - مدول با کدام مورد یکرخت است؟  

$$\frac{\mathbb{Z}[x]}{\langle x^2 \rangle} \otimes_{\mathbb{Z}[x]} \frac{\mathbb{Z}[x]}{\langle x^3 \rangle}$$
 (۱)  $\frac{\mathbb{Z}[x]}{\langle x^2 \rangle}$   
 (۲)  $\frac{\mathbb{Z}[x]}{\langle x \rangle}$   
 (۳)  $\frac{\mathbb{Z}[x]}{\langle x^6 \rangle}$   
 (۴)  $\frac{\mathbb{Z}[x]}{\langle x^3 \rangle}$
- ۵۱- برای حلقه  $\frac{\mathbb{Z}_{19}[x]}{\langle x^{1404} \rangle}$ ، کدام مورد درست است؟  
 (۱) آرتینی نیست و بیش از یک ایده آل اول دارد.  
 (۲) آرتینی است و بیش از یک ایده آل اول دارد.  
 (۳) آرتینی نیست و فقط یک ایده آل اول دارد.  
 (۴) آرتینی است و فقط یک ایده آل اول دارد.

۵۲- کدام حکم در مورد  $\mathbb{Z} -$  مدول  $(\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}, +)$  درست است؟

(۱) آرئینی نیست، ولی نوتری است.

(۲) آرئینی است، ولی نوتری نیست.

(۳) نه آرئینی و نه نوتری است.

(۴) هم آرئینی و هم نوتری است.

۵۳- فرض کنید  $R$  یک حلقه و  $M$  و  $N$ ، دو  $R$ -مدول باشند. همچنین فرض کنید نگاشت‌های  $f: M \rightarrow N$  و  $g: N \rightarrow M$ ، هم‌ریختی‌های  $R$ -مدولی باشند به‌طوری که  $fg = Id_N$  (نگاشت همانی روی  $N$  است). در این صورت، کدام مورد درست است؟

(۱)  $Ker(f) \cap Im(g) \neq \{0\}$ ,  $M = Ker(f) + Im(g)$

(۲)  $Ker(f) \cap Im(g) = \{0\}$ ,  $M \neq Ker(f) + Im(g)$

(۳)  $Ker(f) \cap Im(g) = \{0\}$ ,  $M = Ker(f) + Im(g)$

(۴)  $Ker(f) \cap Im(g) \neq \{0\}$ ,  $M \neq Ker(f) + Im(g)$

۵۴- فرض کنید  $F$  یک گروه آزاد با مجموعه مولد  $X$  است. کدام گزاره زیر درست است؟

(۱) هر زیر گروه  $H$  از  $F$  نیز یک گروه آزاد است.

(۲) تعداد روابط در  $F$  همیشه برابر تعداد مولدهاست.

(۳) مرکز  $F$  فقط شامل عضو همانی است.

(۴) هر عضو غیرهمانی از  $F$ ، از مرتبه متناهی است.

۵۵- فرض کنید  $R$  یک حلقه یکدار باشد به‌طوری که به‌ازای هر  $x \in R$ ، اعداد طبیعی  $n$  و  $m$  ( $m > n$ ) موجودند که  $x^n = x^m$ .

اگر  $J(R)$  و  $Nil(R)$  به‌ترتیب رادیکال جیکوبسن  $R$  و مجموعه اعضای پوچ‌توان  $R$  باشند، آنگاه کدام مورد درست است؟

(۱)  $Nil(R) = J(R) = \{0\}$

(۲)  $Nil(R) \subseteq J(R)$

(۳)  $J(R) \subseteq Nil(R)$

(۴) هیچ‌کدام

بهینه‌سازی خطی پیشرفته ۱ - آنالیز عددی پیشرفته:

۵۶- به‌ازای چند مقدار غیرصالح  $k$ ، مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر دارای جواب بهینه چندگانه (دگرین) است؟

$$\text{Max } z = kx_1 + (2k - 1)x_2$$

$$\text{s.t. } 3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) ۱

(۴) صفر

۵۷- جدول‌های آغازین و بهینه یک مسئله برنامه‌ریزی خطی ماکزیمم‌سازی به صورت زیر داده شده‌اند. مقدار  $a$  کدام است؟

|       | Z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $s_1$          | $s_2$          | RHS         |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|----------------|----------------|-------------|
| Z     | ۱ | -۲    | -۸    | -۱۰   | -۶    | ۰              | ۰              | ۰           |
| $s_1$ | ۰ | ۲     | ۱     | ۴     | ۲     | ۱              | ۰              | ۲۰۰         |
| $s_2$ | ۰ | ۱     | ۲     | ۲     | ۱     | ۰              | ۱              | ۱۶۰         |
|       |   |       |       |       |       |                |                |             |
| Z     | ۱ | a     | ۰     | ۲     | ۰     | $\frac{4}{3}$  | $\frac{10}{3}$ | c           |
| $x_4$ | ۰ | ۱     | ۰     | ۲     | ۱     | $\frac{2}{3}$  | $-\frac{1}{3}$ | $\bar{b}_1$ |
| $x_2$ | ۰ | b     | ۱     | ۰     | ۰     | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$  | $\bar{b}_2$ |

جدول  
آغازین

جدول  
بهینه

(۱) ۴

(۲) ۲

(۳) ۱

(۴) صفر

۵۸- بخشی از جدول متناظر با یکی از تکرارهای مرحله (فاز) اول روش دومرحله‌ای (دوفازی) برای حل یک مسئله استاندارد، به صورت زیر است. اگر  $s_i$  متغیر کمکی قید  $i$ -ام و  $R_i$  متغیر مصنوعی آن باشد، آنگاه مقدار  $\alpha + \beta$  کدام است؟

|       | Z | $x_1$         | $x_2$ | $s_1$   | $s_2$          | $R_1$ | $R_2$ | RHS |
|-------|---|---------------|-------|---------|----------------|-------|-------|-----|
| Z     | ۱ | $\alpha$      | ۰     | -۱      | $\frac{1}{3}$  |       |       |     |
| $R_1$ | ۰ | $\frac{5}{3}$ | ۰     | $\beta$ | $\frac{1}{3}$  |       |       |     |
| $x_2$ | ۰ | $\frac{1}{3}$ | ۱     | ۰       | $-\frac{1}{3}$ |       |       |     |

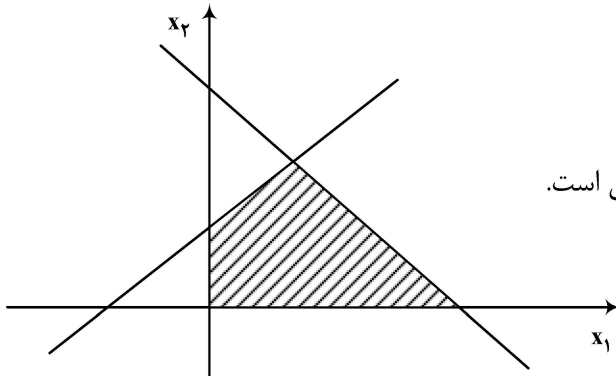
(۱) ۱

(۲)  $\frac{2}{3}$

(۳)  $-\frac{2}{3}$

(۴) -۱

۵۹- ناحیه شدنی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی ماکزیمم‌سازی به صورت زیر است. کدام مورد برای مسئله دوگان (تائویه) آن درست است؟



(۱) ناحیه شدنی آن کراندار و جواب بهینه دگرین دارد.

(۲) ناحیه شدنی آن کراندار و فقط جواب بهینه رأسی دارد.

(۳) ناحیه شدنی آن بی‌کران و مقدار تابع هدف آن نامتناهی است.

(۴) ناحیه شدنی آن بی‌کران و جواب بهینه رأسی دارد.

۶۰- مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر مفروض است. اگر همه درایه‌های ماتریس  $A$  و بردار  $b$  مثبت باشند، آنگاه کدام مورد درست است؟

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= cx \\ \text{s.t. } Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

(۱) مسئله اصلی شدنی و دوگان آن نشدنی است.

(۲) مسئله اصلی و دوگان آن جواب بهینه دارند.

(۳) مسئله اصلی مقدار بهینه متناهی ندارد و دوگان آن نشدنی است.

(۴) مسئله اصلی نشدنی است و دوگان آن مقدار بهینه متناهی ندارد.

۶۱- مسئله برنامه ریزی خطی زیر و جدول بهینه آن مفروض است. اگر مقدار  $b_2$  از  $460$  به  $660$  تغییر کند، آنگاه کدام مورد درست است؟

$$\text{Max } z = 3x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

$$\text{s.t. } 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 460$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

|       | Z | $x_1$          | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$          | $s_2$          | RHS              |
|-------|---|----------------|-------|-------|----------------|----------------|------------------|
| Z     | 1 | $\frac{14}{3}$ | 0     | 0     | $\frac{1}{3}$  | $\frac{7}{3}$  | $\frac{3650}{3}$ |
| $x_2$ | 0 | $\frac{1}{3}$  | 1     | 0     | $\frac{2}{3}$  | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{400}{3}$  |
| $x_3$ | 0 | $\frac{4}{3}$  | 0     | 1     | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$  | $\frac{490}{3}$  |

(۱) جواب بهینه تغییر می کند، ولی مقدار بهینه تغییر نمی کند.

(۲) جواب بهینه و مقدار بهینه تغییر می کنند.

(۳) جواب بهینه تغییر نمی کند، ولی مقدار بهینه تغییر می کند.

(۴) جواب بهینه و مقدار بهینه تغییر نمی کنند.

۶۲- فرض کنید  $g$  چند جمله ای درون یاب تابع  $\sin x$  در بازه  $[0, \pi]$  چنان باشد که

$$g(0) = g(\pi) = 0, \quad g'(0) = -g'(\pi) = 1, \quad \text{اگر } \|\sin x - g(x)\|_1 \leq \frac{\pi^n}{k!} = L \text{ و } L \text{ کوچکترین عددی باشد، که}$$

درستی نامساوی فوق قابل اثبات باشد، آنگاه  $(n, k)$  کدام است؟

(۱)  $(5, 5)$

(۲)  $(4, 4)$

(۳)  $(6, 6)$

(۴)  $(5, 6)$

۶۳- فرض کنید  $-1 + \frac{x-1}{x-2} + \frac{a}{b+x}$  کسر مسلسل باشد، که از درون یابی کسری تابع جدولی

$$\left\{ (1, -1), (2, 3), (3, \frac{5}{3}) \right\} \text{ به دست می آید. } (a, b) \text{ کدام است؟}$$

(۱)  $(\frac{1}{4}, -1)$

(۲)  $(4, -2)$

(۳)  $(-4, -1)$

(۴)  $(\frac{1}{4}, 2)$

۶۴- فرض کنید روش درون یابی هرمیت برای درون یابی تابع  $f(x) = e^x$  را در نقاط  $0, 1, 2$  چنان به کار می بریم، که از

تابع  $f$  در  $x=2$  و از  $f'$  و  $f''$  در  $x=1$  و از  $f'$  و  $f''$  در  $x=0$  استفاده شود. مقدار  $f[0, 0, 0, 1, 1]$  کدام است؟

(۱)  $5/5$

(۲)  $5/5 - 2e$

(۳)  $0/5$

(۴)  $-0/5 - 2e$

۶۵- فرض کنید  $\int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} \cong \alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1)$ . اگر دستور فوق برای تقریب انتگرال یک چندجمله‌ای با

بزرگ‌ترین درجه دقیق باشد، آنگاه مقدار  $\alpha + 2\beta + 3\gamma$  کدام است؟

(۱)  $\pi$

(۲)  $\frac{3\pi}{2}$

(۳)  $2\pi$

(۴)  $\frac{5\pi}{2}$

### اصول آموزش ریاضی:

۶۶- کدام عبارت به‌درستی انتقاد کلمنتس و الرتون از آزمون‌های کتبی سنتی را منعکس می‌کند؟

- (۱) هزینه بالایی برای دولت‌ها دارند.
- (۲) تنها در کشورهای غربی معتبر هستند.
- (۳) تنها مهارت‌های محاسباتی را می‌سنجد.
- (۴) ابزاری برای امپریالیسم فرهنگی هستند.

۶۷- کلمنتس و الرتون، کدام نوع پژوهش را برای بهبود آموزش ریاضی در شرایط واقعی مدارس ضروری می‌دانند؟

- (۱) اقدام‌پژوهی با مشارکت معلمان
- (۲) پژوهش‌های کمی با آمار استنباطی
- (۳) پژوهش‌های کیفی با ابزارهای کامپیوتری
- (۴) پژوهش‌های آزمایشی با کنترل متغیرهای مزاحم

۶۸- کدام ویژگی به روش آموزش باز در یاددهی - یادگیری ریاضیات، اشاره می‌کند؟

- (۱) فعالیت‌های ریاضی پروژه - بسته است.
- (۲) نمره به‌عنوان یک انگیزش بیرونی در روابط میان شاگرد و معلم است.
- (۳) امتحان ابزاری برای به کار واداشتن شاگردان است.
- (۴) کتاب بسته و جزوه محور است.

۶۹- کدام عبارت به‌درستی یکی از ویژگی‌های اصلی دوره «ریاضیات جدید» را بیان می‌کند؟

- (۱) تمرکز بر روش‌های شهودی و ساخت‌گرایانه
- (۲) حذف کامل مفاهیم هندسی از برنامه‌های درسی
- (۳) کاهش استفاده از نمادها و زبان فنی ریاضی در مدل‌سازی مسئله
- (۴) معرفی مفاهیم ساختاری مانند نظریه مجموعه‌ها، جبر مجرد

۷۰- کدام عبارت بهترین تحلیل از جنبش «رجعت به اصول» و پایه‌های فلسفی آن را ارائه می‌دهد؟

- (۱) این جنبش به دلیل شکست فلسفه پوزیتیویسم، به‌سمت آموزش مبتنی بر مسائل واقعی و محوریت معلم حرکت می‌کند.
- (۲) این جنبش با هدف کاهش حجم محتوای درسی و افزایش خلاقیت دانش‌آموزان، از رویکرد فعال و کشفی در آموزش ریاضی حمایت می‌کند.
- (۳) این جنبش تحت تأثیر فلسفه تحصيل‌گرایی قرار داشت و بر تمرین‌های تکراری، حل مثال‌های استاندارد و انتقال مستقیم دانش تأکید می‌کند.
- (۴) این جنبش بر اساس فلسفه ساخت‌گرایی طراحی شده بود و هدف آن، تقویت درک مفهومی دانش‌آموزان از طریق حل مسئله و فعالیت‌های گروهی است.

۷۱- کدام عبارت درست‌ترین تحلیل از نقش و دیدگاه هانس فرودنتال، به‌عنوان یک ریاضیدان در مورد جنبش «ریاضی جدید» و رویکردهای آموزشی آن است؟

(۱) جنبش «ریاضی جدید» را حمایت کرد، زیرا با تأکید بر ساختارهای انتزاعی و منطقی ریاضی، به توسعه تفکر منطقی دانش‌آموزان کمک می‌کرد.

(۲) با نقد جنبش «ریاضی جدید»، بر این باور بود که آموزش ریاضی باید از واقعیت‌های زندگی و تجربه دانش‌آموزان شروع شود و نه از افلاطون‌گرایی یا رفتارگرایی.

(۳) به‌دلیل اعتقاد به رویکرد رفتارگرایانه، از استفاده از طبقه‌بندی اهداف بلوم در آموزش ریاضی حمایت می‌کرد و آن را بهترین راهنمای برنامه‌ریزی درسی می‌دانست.

(۴) با تأکید بر «رجعت به اصول»، خواستار بازگشت به آموزش تمرین‌محور و حل مثال‌های استاندارد شد، زیرا این روش‌ها در دوران ریاضی جدید نادیده گرفته شده بودند.

۷۲- از منظر کلمنتس و الرتون، اساسی‌ترین کاستی پژوهش‌های سنتی در آموزش ریاضی، که اقدام‌پژوهی در پی رفع آن است، کدام است؟

(۱) فقدان چارچوب‌های نظری منسجم برای تبیین و تفسیر یافته‌ها

(۲) غفلت از بهره‌گیری از روش‌های آماری پیشرفته و تحلیل‌های کمی گسترده

(۳) تمرکز بیش از حد بر نتایج مبتنی بر ارزشیابی با کنترل متغیرهای مزاحم مانند جنسیت و پایگاه اجتماعی

(۴) جدایی نقش پژوهشگر از معلم و انجام پژوهش بر روی معلمان به‌جای مشارکت آن‌ها

۷۳- از دیدگاه انتقادی، «یادگیری در حد تسلط» و «برنامه‌ریزی آموزشی انفرادی» بر اساس پارادایم رفتارگرایی، چه پیامد منفی بنیادینی بر درک ریاضی دانش‌آموزان داشت؟

(۱) تجزیه محتوای ریاضی به اهداف رفتاری جزئی و از دست رفتن فهم کل‌نگر و روابط

(۲) کاهش مشارکت فعال دانش‌آموزان و انحراف از اهداف روان‌شناسی تدریس

(۳) توسعه بیش از حد فهم مفهومی به جای مهارت‌های عملیاتی

(۴) کاهش شدید زمان لازم برای یادگیری ریاضیات پیچیده

۷۴- در کلاس ریاضی، پاسخ فوری شاگردان به مسئله مطرح شده معلم به‌صورت زیر است. کدام مهارت ریاضی دانش‌آموزان باید مورد توجه قرار گیرد؟

مسئله: علی چمن‌های قطعه زمینی را در ۱۲ ساعت و حسن

همین چمن‌ها را در ۸ ساعت کوتاه می‌کند. اگر هر دو نفر با

هم کار کنند، در چه مدت چمن‌ها کوتاه می‌شوند؟

$$\text{پاسخ: } 10 = \frac{12+8}{2}$$

(۱) مهارت ذهنی

(۲) مهارت عملکردی

(۳) مهارت فرایندی

(۴) مهارت موقعیتی

۷۵- آلن بی‌شاپ، دو مؤلفه را در آموزش ریاضی مطرح کرد تا این ادعا را که ریاضی یک زبان بین‌المللی است و در همه جا، یک و تنها یک روش ارائه دارد، به چالش بکشد. این دو مؤلفه کدامند؟

(۱) حل مسئله و فرهنگ‌ها

(۲) فرهنگ‌ها و ارزش‌ها

(۳) بازنمایی‌ها و ارزش‌ها

(۴) ارزش‌ها و مسائل دنیای واقعی



