

پی اچ دی تست،

سایت مشاور آزمون دکتری

www.phdtest.ir



304

A

نام
نام خانوادگی
محل امضاء

صبح جمعه
۹۱/۱/۲۵

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی
دوره‌های دکتری (نیمه متمرکز) داخل
در سال ۱۳۹۱

رشته‌ی
ریاضی محض (کد ۲۲۳۳)

شماره داوطلبی: نام و نام خانوادگی داوطلب:

مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی (آنالیز ریاضی ۱، جبر خطی، جبر الگبرانه) ریاضی محض شامل جبر پیشرفته، آنالیز حقیقی (۱)	۴۵	۴۵	۴۵

فروردین سال ۱۳۹۱

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.

حق چاپ و تکثیر سؤالات پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

۱- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ پیوسته باشد، آنگاه مشتق پذیر است.
 (۲) فضای متریک (X, d) فشرده است اگر و تنها اگر هر تابع پیوسته بر X ، پیوسته یکنواخت باشد.
 (۳) اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ اکیداً صعودی و $f(\mathbb{R})$ در \mathbb{R} بسته باشد، آنگاه f پیوسته است.
 (۴) اگر (X, d_1) و (Y, d_2) دو فضای متریک و $a \in X$ و $f: X \rightarrow Y$ تابعی مفروض باشد، آنگاه f در a پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر تابع $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ که در $f(a)$ پیوسته است، $g \circ f$ در a پیوسته باشد.

۲- فرض کنید $a_n \geq 0$ و $\sum_1^{\infty} a_n$ همگرا باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱) سری $\sum_1^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ همگراست اگر و تنها اگر $p > 1$.

(۲) سری $\sum_1^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ همگراست اگر و تنها اگر $p \geq \frac{1}{2}$.

(۳) سری $\sum_1^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ همگراست اگر و تنها اگر $p > \frac{1}{2}$.

(۴) اگر $p > \frac{1}{2}$ ، آنگاه سری $\sum_1^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ همگراست.

۳- برای تابع مشتق پذیر $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید.

(الف) اگر $f^{-1}(\{0\})$ ناشمارا باشد آنگاه $c \in (0, 1)$ موجود است به طوری که $f(c) = f'(c) = 0$.

(ب) اگر f' کراندار باشد آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ موجود و متناهی است.

(ج) اگر f پیوسته یکنواخت باشد آنگاه f' کراندار است.

(د) اگر f' به یک به یک باشد آنگاه f پیوسته است.

(۱) گزاره‌های (الف) و (ب) درست هستند ولی (ج) و (د) نادرست می‌باشند.

(۲) گزاره‌های (الف)، (ج) و (د) درست هستند ولی (ب) نادرست است.

(۳) گزاره‌های (ب)، (ج) درست هستند ولی (الف) و (د) نادرست می‌باشند.

(۴) گزاره‌های (الف)، (ب) و (د) درست هستند ولی (ج) نادرست است.

۴- اگر (X, d) یک فضای متریک و A زیرمجموعه‌ای فشرده و B زیرمجموعه‌ای بسته در X باشند که $A \cap B = \emptyset$ ، کدام گزینه الزاماً برقرار نیست؟

- (۱) نقاط $(a_0, b_0) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$ موجودند که $b_0 \in B$ و $a_0 \in A$.
- (۲) زیرمجموعه‌های باز U و V از X موجودند که $A \subset U, B \subset V, \bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$.
- (۳) اگر $X = \mathbb{R}$ و d متر اقلیدسی باشد، مجموعه‌ی $Y = \{bsina : b \in B, a \in A\}$ بسته است.
- (۴) داریم $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} > 0$ ، اما اگر شرط بسته بودن را جایگزین شرط فشرده بودن A کنیم ممکن است این نتیجه برقرار نباشد.

۵- مجموعه نقاط حدی مجموعه $\{\sqrt{m} - \sqrt{n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ کدام است؟

- (۱) $\{0\}$
- (۲) \emptyset (مجموعه تهی)
- (۳) \mathbb{R}
- (۴) \mathbb{Z} (مجموعه اعداد صحیح)

۶- فرض کنید A و B دو زیر مجموعه کراندار و غیر تهی از اعداد حقیقی باشند. تساوی $\sup A = \inf B$ با کدام گزینه معادل است؟

- (۱) برای هر $a \in A$ و هر $b \in B$ ، $a \leq b$ و برای هر $a \in A$ ، $\varepsilon > 0$ وجود دارد به قسمی که $b - \varepsilon < a$.
- (۲) برای هر $a \in A$ و هر $b \in B$ ، $a \leq b$ و برای هر $\varepsilon > 0$ ، $a \in A$ و $b \in B$ وجود دارند به قسمی که $b - a \leq \varepsilon$.
- (۳) برای هر $a \in A$ ، $b \in B$ وجود دارد به قسمی که $a \leq b$ و برای هر $\varepsilon > 0$ ، $a \in A$ و $b \in B$ وجود دارند به قسمی که $b - a \leq \varepsilon$.
- (۴) برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $a \in A$ ، $b \in B$ وجود دارد که $a + \varepsilon > b$ و برای هر $a \in A$ ، $b \in B$ وجود دارد که $b - \varepsilon < a$.

۷- فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ باز و بی‌کران و $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ به طور یکنواخت پیوسته باشد. هر گاه $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی در A باشد، آنگاه:

- (۱) دنباله $\{f(x_n)\}$ همگرا است.
 - (۲) دنباله $\{f(x_n)\}$ لزوماً همگرا نیست اما دارای یک زیر دنباله همگرا است.
 - (۳) دنباله $\{f(x_n)\}$ کراندار است ولی لزوماً همگرا نیست.
 - (۴) هر زیر دنباله $\{f(x_n)\}$ زیر دنباله‌ای دارد که در $f(A)$ همگرا است.
- ۸- اگر A یک ماتریس وارون پذیر 3×3 با درآیه‌ها در میدان \mathbb{R} باشد و داشته باشیم $\text{tr} A^T = \text{tr} A = 0$ و $\det A = 1$ ، آنگاه:

- (۱) $A^T = I$
- (۲) $A^T = -I$
- (۳) $A^T = A + I$
- (۴) $A^T = A^T + I$

- ۹- ماتریس $n \times n$ مانند A که $n > 1$ ، با درایه‌های مختلط در تساوی $A^n = \lambda A$ صدق می‌کند. در این صورت:
- (۱) A قطری شدنی است.
 - (۲) A قطری شدنی نیست.
 - (۳) A مثلثی شدنی نیست.
 - (۴) A مثلثی شدنی است ولی قطری شدنی نیست.
- ۱۰- چند جمله‌ای می‌نیمال ماتریس $A \in M_n(\mathbb{R})$ عبارتست از $x^2 - 1$ و چند جمله‌ای می‌نیمال ماتریس $B \in M_n(\mathbb{R})$ عبارتست از $x^2 + 1$ ، اگر $AB = BA$ ، چند جمله‌ای می‌نیمال ماتریس AB عبارتست از:
- (۱) $x^2 - 1$
 - (۲) $x^2 + 1$
 - (۳) $x^4 - 1$
 - (۴) $x^4 + 1$
- ۱۱- فرض کنید $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. کدام گزینه صحیح نیست؟
- (۱) $\text{rank}(AB - BA) \leq 2 \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$
 - (۲) $\text{rank}(AB - BA) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$
 - (۳) $|\text{rank}(AB) - \text{rank}(BA)| \leq \text{rank}(AB - BA)$
 - (۴) $\text{rank}(AB - BA) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
- ۱۲- فرض کنید $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ به طوری که A در چند جمله‌ای مشخصه B صدق می‌کند و B نیز در چند جمله‌ای مشخصه A صدق می‌کند. کدام گزینه صحیح است؟
- (۱) A و B چند جمله‌ای مشخصه یکسان دارند.
 - (۲) A و B رتبه یکسان دارند. ($\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$)
 - (۳) مجموعه مقادیر ویژه متمایز A با مجموعه مقادیر ویژه متمایز B برابر است.
 - (۴) A قطری شدنی است اگر و فقط اگر B قطری شدنی باشد.
- ۱۳- فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ و به ازای هر عدد طبیعی m ، $\text{tr}(A^m) = 0$. در این صورت در مورد A چه می‌توان گفت؟
- (۱) A پوچتوان است.
 - (۲) $A^2 - I$ وارون‌ناپذیر است.
 - (۳) $A^2 + I$ وارون‌ناپذیر است.
 - (۴) $\text{tr}(AB) = 0$ برای هر ماتریس $B \in M_n(\mathbb{R})$.

۱۴- فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ و $f(x)$ چند جمله‌ای مشخصه A باشد، کدام گزینه صحیح است؟ (منظور از $A(i|j)$ زیر ماتریسی از A است که از حذف سطر i ام و ستون j ام به دست آمده است.)

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x \det(xI - A(i|j)) \quad (۱)$$

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \det(xI - A(i|j)) \quad (۲)$$

$$f'(x) = \sum_{j=1}^n x \det(xI - A(j|j)) \quad (۳)$$

$$f'(x) = \sum_{j=1}^n \det(xI - A(j|j)) \quad (۴)$$

۱۵- اگر $T = \mathbb{R}[X, Y, Z]$ کدام یک از ایده‌آل‌های زیر اول است؟

$$\langle XY, XZ + YZ \rangle \quad (۱)$$

$$\langle X^2YZ, Z \rangle \quad (۲)$$

$$\langle X^2, Y + Z \rangle \quad (۳)$$

$$\langle XY, XZ \rangle \quad (۴)$$

۱۶- فرض کنید G گروهی دلخواه ۸۱ عضوی است و H زیر گروهی ۲۷ عضوی از G باشد، در این صورت کدام گزینه صحیح نمی‌باشد؟

$$H^2 = 1 \quad (۱)$$

$$Z(H) \neq 1 \quad (۲)$$

$$H \triangleleft G \quad (۳)$$

$$G' \subseteq H \quad (۴)$$

۱۷- فرض کنید G یک گروه و H زیر گروهی از G باشد به طوری که به ازای هر $x \in G$ داشته باشیم $x^2 \in H$ ، آنگاه کدام گزاره صحیح است؟

$$H = G \quad (۱)$$

(۲) H زیر گروهی نرمال و آبلی است.

(۳) H زیر گروهی نرمال شامل G' است.

(۴) H زیر گروهی ماکسیمال در G است.

۱۸- $S_3 \times S_3$ را به عنوان زیر گروه S_6 در نظر می‌گیریم. تعداد جایگشت‌های زوج در این زیر گروه کدام است؟

$$۶ \quad (۱)$$

$$۹ \quad (۲)$$

$$۱۲ \quad (۳)$$

$$۱۸ \quad (۴)$$

۱۹- اگر Q_8 گروه کواترنیون‌های هشت عضوی باشد و S_3 گروه جایگشت‌های روی ۳ حرف، آنگاه گروه $Q_8 \times S_3$ چند عنصر مرتبه ۱۲ دارد؟

(۱) ۴

(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) ۱۲

۲۰- فرض کنید R حلقه‌ای یک‌دار بوده و m یک ایده‌آل ماکسیمال دوطرفه R باشد. در این صورت کدام یک از گزینه‌های زیر درستند؟

(۱) $\frac{R}{m}$ میدان است.

(۲) ممکن است مقسوم علیه صفر نابديهی داشته باشد.

(۳) حلقه تقسیم است.

(۴) حلقه‌ای متناهی است.

۲۱- فرض کنید $(\mathbb{Q}, +)$ گروه جمعی اعداد گویا و H زیرگروهی از آن باشد. کدام گزینه صحیح نیست؟

(۱) اگر $\frac{\mathbb{Q}}{H} \cong \mathbb{Q}$ آنگاه $H = \{0\}$.

(۲) اگر $H \neq \{0\}$ آنگاه هر عضو $\frac{\mathbb{Q}}{H}$ از مرتبه متناهی است.

(۳) اگر $H \neq \{0\}$ آنگاه هر زیر گروه سره $\frac{\mathbb{Q}}{H}$ از مرتبه متناهی است.

(۴) اگر $\frac{\mathbb{Q}}{H}$ گروهی متناهی باشد آنگاه $H = \mathbb{Q}$.

۲۲- کدام یک از گروه‌های آبدلی زیر با $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p)$ یکرخت است؟

(۱) ۰

(۲) \mathbb{Z}_p

(۳) \mathbb{Z}_p

(۴) $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}$

۲۳- کدام گزینه به عنوان \mathbb{Z} -مدول با بقیه یکرخت نیست؟ (p عددی اول است.)

(۱) $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

(۲) $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

(۳) $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

(۴) $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

۲۴- کدام یک از حلقه‌های زیر نوتری چپ نیست؟

(۱) $\mathbb{Z}[x]$

(۲) ${}^2\mathbb{Z}[x]$

(۳) $M_n(\mathbb{Z})$

(۴) $M_n(\mathbb{Z})[x]$

۲۵- فرض کنید S حلقه‌ای یک‌دار است و $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow S$ یک هم‌ریختی حلقه‌ای ناصفر باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

(۱) S آرتینی چپ است.

(۲) S نوتری چپ است.

(۳) S حلقه‌ای ساده است.

(۴) S دارای نامتناهی عنصر پوچتوان است.

۲۶- کدام گزینه صحیح نیست؟

(۱) \mathbb{C} و $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$ به عنوان \mathbb{C} -مدول یکرختند.

(۲) \mathbb{C} و $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ به عنوان \mathbb{R} -مدول یکرختند.

(۳) \mathbb{Q} و $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}$ به عنوان \mathbb{Q} -مدول یکرختند.

(۴) \mathbb{Q} و $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ به عنوان \mathbb{Z} -مدول یکرختند.

۲۷- اگر R یک دامنه ایده‌آل اصلی (PID) و M یک R -مدول دوری فرض شود و N یک زیر مدول M آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

(۱) N دوری است.

(۲) N دارای زیر مدول ماکسیمال نیست.

(۳) N زیر مدول بدیهی است.

(۴) N متناهی مولد نیست.

۲۸- کدام یک از رشته‌های دقیق زیر شکافته می‌شود؟ (مدول‌ها به عنوان \mathbb{Z} -مدول در نظر گرفته می‌شوند).

(۱) $0 \rightarrow {}^2\mathbb{Z} \xrightarrow{\subseteq} \mathbb{Z} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{{}^2\mathbb{Z}} \rightarrow 0$

(۲) $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\subseteq} \mathbb{Q} \rightarrow \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0$

(۳) $0 \rightarrow {}^2\mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\subseteq} \mathbb{Z}_4 \rightarrow \frac{\mathbb{Z}_4}{{}^2\mathbb{Z}_4} \rightarrow 0$

(۴) $0 \rightarrow \mathbb{Q} \xrightarrow{\subseteq} \mathbb{R} \rightarrow \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Q}} \rightarrow 0$

- ۲۹- فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار و $J(R)$ رادیکال جیکوبسن R باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟
- (۱) $J(R)$ پوچتوان است.
 - (۲) $J(R)$ اشتراک تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال است.
 - (۳) رادیکال جیکوبسن $\frac{R}{J(R)}$ برابر صفر است.
 - (۴) عنصر پوچتوانی از R وجود دارد که در $J(R)$ قرار ندارد.
- ۳۰- فرض کنید M یک R -مدول ساده باشد. در این صورت در مورد تعداد زیر مدول‌های $M \oplus M$ چه می‌توان گفت؟
- (۱) می‌تواند نامتناهی باشد.
 - (۲) ۲ تا است.
 - (۳) ۳ تا است.
 - (۴) ۴ تا است.
- ۳۱- اگر $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}$ و $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$ به عنوان \mathbb{Z} -مدول باشند در این صورت کدام گزینه صحیح است؟
- (۱) R و S تصویری می‌باشند.
 - (۲) R و S تصویری نمی‌باشند.
 - (۳) R تصویری می‌باشد ولی S تصویری نیست.
 - (۴) R تصویری نمی‌باشد ولی S تصویری است.
- ۳۲- فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار با تنها ایده‌آل ماکسیمال m باشد. اگر m متناهی باشد کدام گزینه صحیح است؟
- (۱) $m = 0$.
 - (۲) m اول نیست.
 - (۳) m پوچتوان است.
 - (۴) $R \setminus m$ نامتناهی است.
- ۳۳- فرض کنید $R = M_2(\mathbb{Z}) \times M_3(\mathbb{Z}_8) \times M_3(\mathbb{Z}_3)$ تعداد عناصر $J(R)$ کدام است؟
- (۱) 3^4
 - (۲) 2^8
 - (۳) $3^4 \cdot 2^4$
 - (۴) نامتناهی عضو دارد.
- ۳۴- فرض کنید λ اندازه لیگ روی \mathbb{R} باشد و برای $A \subseteq \mathbb{R}$ ، $A - A = \{x - y : x, y \in A\}$. کدام گزاره نادرست است؟
- (۱) اگر A اندازه‌پذیر باشد و $\lambda(A) > 0$ آنگاه $\lambda(A - A) > 0$.
 - (۲) اگر $C \subseteq [0, 1]$ مجموعه کانتور باشد، $C - C$ مجموعه‌ای فشرده و همبند است و $\lambda(C - C) > 0$.
 - (۳) اگر G زیر گروه جمعی سره اندازه‌پذیر \mathbb{R} باشد آنگاه $\lambda(G) = 0$.
 - (۴) اگر $A \subseteq [0, 1]$ اندازه‌پذیر و $A \setminus [0, 1] \neq \emptyset$ در $[0, 1]$ چگال باشد آنگاه $\lambda(A) = 0$ یا $\lambda(A) = 1$.

$$-35 \quad \sigma\text{-جبر } \{E \text{ یا } E^c \text{ حداکثر شمارا است : } E \subseteq \mathbb{R} \text{ و اندازه ی } A = \{E \subseteq \mathbb{R} : \mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{حداکثر شمارا} \\ 1 & \text{حداکثر شمارا} \end{cases} \text{ را روی } \mathbb{R} \text{ در}$$

نظر بگیرید. اگر μ^* اندازه خارجی تولید شده توسط μ باشد، مقادیر $\mu^*([0, \frac{1}{4}])$ و $\mu^*([0, \infty))$ به ترتیب و

..... هستند.

(۱) $\frac{1}{2}$ و ۱

(۲) ۱ و ۱

(۳) $\frac{1}{2}$ و ∞

(۴) ∞ و ۱

-36 تابع $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ تعریف می شود. در این صورت:

(۱) f انتگرال پذیر لیگ است ولی انتگرال ریمان ناسره $\int_1^{\infty} f(x) dx$ واگراست.

(۲) f انتگرال پذیر لیگ است و انتگرال ریمان ناسره $\int_1^{\infty} f(x) dx$ همگراست.

(۳) انتگرال ریمان ناسره $\int_1^{\infty} f(x) dx$ همگراست ولی f انتگرال پذیر لیگ نیست.

(۴) انتگرال ریمان ناسره $\int_1^{\infty} f(x) dx$ واگراست و f انتگرال پذیر لیگ نیست.

-37 فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی کراندار باشد. در این صورت:

(۱) اگر $|f|$ انتگرال پذیر لیگ باشد آنگاه f انتگرال پذیر ریمان است.

(۲) اگر $|f|$ انتگرال پذیر لیگ باشد آنگاه f اندازه پذیر است.

(۳) اگر f انتگرال پذیر لیگ باشد آنگاه f انتگرال پذیر ریمان است.

(۴) اگر f اندازه پذیر و f^2 انتگرال پذیر لیگ باشد آنگاه f نیز انتگرال پذیر لیگ است.

۳۸- فرض کنید X یک مجموعه نامشمارا و A, σ - جبری روی X باشد که توسط تمام مجموعه‌های تک عضوی تولید شده است. در این صورت تابع $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ نسبت به A اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر:

(۱) روی مکمل (complement) یک مجموعه حداکثر شمارا ثابت باشد.

(۲) ثابت باشد.

(۳) روی یک مجموعه حداکثر شمارا ثابت باشد.

(۴) روی یک مجموعه حداکثر شمارا صفر باشد.

۳۹- فرض کنید μ یک اندازه روی X و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی اندازه‌پذیر روی X باشد به طوری که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x)| > \frac{1}{2^n}\}) < \infty$$

کدام گزینه نادرست است؟

(۱) $\{f_n\}$ تقریباً همه جا به صفر همگرا است.

(۲) سری $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ تقریباً همه جا همگرا است.

(۳) اگر $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{x \in X : |f_m(x)| > \frac{1}{2^n}\}$ آنگاه $\mu(E) = 0$.

(۴) $\{f_n\}$ در اندازه به صفر همگرا نیست.

۴۰- اگر تابع مشخصه بازه $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ باشد، دنباله توابع $f_n = n g_n$ را روی بازه $[0, 1]$ با اندازه لبگ در نظر بگیرید. کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $f_n \rightarrow 0$ به طور یکنواخت، هر f_n انتگرال‌پذیر است و $\varphi(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ روی بازه $[0, 1]$ انتگرال‌پذیر است.

(۲) $f_n \rightarrow 0$ نقطه‌وار، هر f_n انتگرال‌پذیر است ولی $\varphi(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ روی بازه $[0, 1]$ انتگرال‌پذیر نیست.

(۳) $f_n \rightarrow 0$ نقطه‌وار و توابع f_n همگی از یک تابع انتگرال‌پذیر g کوچکترند.

(۴) $f_n \rightarrow 0$ در اندازه ولی توابع f_n انتگرال‌پذیر نیستند.

۴۱- فرض کنید (X, M, μ) یک فضای اندازه باشد و $L^p(\mu) = L^p(X, \mu)$ و $1 \leq r < p < s < \infty$. کدام گزینه نادرست است؟

$$(1) L^p(\mu) \subseteq L^r(\mu) + L^s(\mu)$$

$$(2) \text{ برای هر } f \text{ اندازه پذیر، } \|f\|_p^p \leq \max(\|f\|_r^r, \|f\|_s^s)$$

$$(3) \text{ اگر } f \in L^1(\mu) \cap L^\infty(\mu) \text{ آنگاه } \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

$$(4) \text{ اگر } f \in L^1(\mu) \cap L^r(\mu) \text{ آنگاه } \lim_{p \rightarrow 1^+} \|f\|_p = \|f\|_1$$

۴۲- اگر $\varphi: [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ تابعی ساده باشد، آنگاه $\lim_{p \rightarrow 0^+} \|\varphi\|_p$ برابر است با:

$$(1) \varphi(0)$$

$$(2) \varphi(1)$$

$$(3) e^{\int \log \varphi}$$

$$(4) \log \int \varphi$$

۴۳- فرض کنید X یک فضای برداری و (\cdot, \cdot) یک حاصل ضرب درونی در آن و $T: X \rightarrow X$ یک عملگر خطی باشد. کدام گزینه نادرست است؟

(1) اگر X فضای حاصل ضرب درونی حقیقی باشد آنگاه شرط کافی برای آنکه $T=0$ آن است که به ازای هر $x \in X$ ، $(Tx, x) = 0$.

(2) اگر X فضای حاصل ضرب درونی مختلط باشد آنگاه شرط کافی برای آنکه $T=0$ آن است که به ازای هر $x \in X$ ، $(Tx, x) = 0$.

(3) اگر X فضای حاصل ضرب درونی مختلط باشد آنگاه شرط لازم برای آنکه $T=0$ آن است که به ازای هر $x \in X$ ، $(Tx, x) = 0$.

(4) اگر X فضای حاصل ضرب درونی حقیقی باشد آنگاه شرط لازم برای آنکه $T=0$ آن است که به ازای هر $x \in X$ ، $(Tx, x) = 0$.

۴۴- اگر تابع $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ دارای مشتق پیوسته باشد، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) f هر مجموعه‌ی با اندازه صفر را به مجموعه‌ای با اندازه‌ی صفر تصویر می‌کند.

(۲) f' هر مجموعه‌ی با اندازه صفر را به مجموعه‌ای با اندازه‌ی صفر تصویر می‌کند.

(۳) f'' در صورت وجود، اندازه‌پذیر لیگ است.

(۴) f پیوسته مطلق است.

۴۵- اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر بورل باشد و λ اندازه لیگ روی \mathbb{R} باشد، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) تابع $g(x, y) = f(x + y)$ روی \mathbb{R}^2 ، $(\lambda \times \lambda)$ - اندازه‌پذیر است.

(۲) تابع $g(x, y) = f(x) + f(y)$ روی \mathbb{R}^2 ، $(\lambda \times \lambda)$ - اندازه‌پذیر است.

(۳) تابع $g(x, y) = f(x)f(y)$ روی \mathbb{R}^2 ، $(\lambda \times \lambda)$ - اندازه‌پذیر است.

(۴) توابع فوق همگی اندازه‌پذیر بورل هستند ولی هیچ کدام $(\lambda \times \lambda)$ - اندازه‌پذیر نیست.