

120F

نام :

نام خانوادگی :

محل امضاء :

صبح جمعه

۹۲/۱۲/۱۶

دفترچه شماره (۱)



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.

امام خمینی (ره)

آزمون ورودی
دوره‌های دکتری (نیمه متمرکز) داخل
سال ۱۳۹۳

علوم کامپیوتر (۲۲۴۷)

مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی (ساختمان گسسته، منطق - نظریه علوم کامپیوتر)	۴۵	۱	۴۵

اسفندماه سال ۱۳۹۲

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.

۱- در دنباله $\{a_n\}_{n \geq 1}$ ، رابطه بازگشتی $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ برقرار است. می دانیم $a_1 + a_2 + a_3 = 120$ و $a_4 + a_6 = 1860$ است. در این صورت $a_{100} + a_{101}$ برابر است با:

(۱) $9 \times 2^{100} + 8 \times 3^{100}$ (۲) $8 \times 2^{100} + 9 \times 3^{100}$

(۳) $9 \times 2^{101} + 8 \times 3^{101}$ (۴) $2^{104} + 3^{103}$

۲- چه تعداد از اعضای مجموعه $A = \{1, 2, \dots, 3000\}$ دقیقاً بر یکی از اعداد ۲، ۳ یا ۵ بخش پذیر هستند؟

(۱) ۸۰۰ (۲) ۱۲۰۰

(۳) ۱۴۰۰ (۴) ۲۲۰۰

۳- بزرگترین ضریب در بسط عبارت $(x+y+z)^9$ کدام است؟

(۱) ۱۲۶ (۲) ۱۲۶۰

(۳) ۱۶۸۰ (۴) ۷۲۸۰

۴- یک شش ضلعی منتظم با راس های a, b, c, d, e, f را در نظر بگیرید. به چند راه می توان با اضافه کردن قطرهای غیر متقاطع آن را به مثلث ها افراز کرد؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۴

(۳) ۱۵ (۴) ۴۲

۵- می خواهیم ۳ کمیته علمی متمایز به کمک ۵ دانشجو تشکیل دهیم به طوری که هر دانشجو عضو حداقل یک کمیته باشد و هر دو کمیته دقیقاً ۲ عضو مشترک داشته باشند. به چند راه می توان کمیته ها را تشکیل داد؟

(۱) ۶۰ (۲) ۳۶۰

(۳) ۴۲۰ (۴) ۶۳۰

۶- در یک شهر فرضی تنها سکه های رایج، سکه های ۱ تومانی، ۲ تومانی و ۳ تومانی است. پرداخت هزینه یک جنس ۲۰ تومانی به چند راه ممکن است؟ مشروط بر آنکه فروشنده هیچ پولی نداشته باشد و تعداد سکه های ۱ تومانی از سکه های ۲ تومانی مورد استفاده بیشتر باشد.

(۱) ۲۰ (۲) ۲۱

(۳) ۳۸ (۴) ۴۰

۷- در گراف همبند G با ۱۰ رأس، تعداد زوج مرتب های (x,y) از رأس ها به طوری که $d(x,y) \geq 2$ ، برابر است با ۷۲. تعداد یالهای G کدام است؟

(۱) ۹ (۲) ۱۸

(۳) ۲۸ (۴) ۳۶

۸- می دانیم چهار نوکلئوتید A, C, G, T الفبای ژنوم موجودات زنده هستند. با سه A ، یک C ، دو G و یک T چند رشته متفاوت به طول هفت می تواند به وجود آید؟

(۱) ۳۵ (۲) ۴۲۰

(۳) 4^7 (۴) $4^7 \times 35$

۹- اگر A ماتریس مجاورت گراف کامل دو بخشی $K_{\Delta, \epsilon}$ باشد، مجموع تمام

درآیه‌های ماتریس A^2 برابر است با:

(۱) ۶۰ (۲) ۱۶۵

(۳) ۳۳۰ (۴) ۳۴۱

۱۰- فرض کنید $n \geq 3$ عدد صحیح باشد. چند درخت بر چسب‌گذاری شده با مجموعه رأس‌های $\{1, 2, \dots, n\}$ و دقیقاً دو رأس درجه یک وجود دارد؟

(۱) $(n-1)!$ (۲) $\frac{(n-1)!}{2}$

(۳) n^{n-2} (۴) $\frac{n!}{2}$

۱۱- فرض کنید T درخت دودویی با رأس‌های $\{A, B, C, D, E\}$ و ریشه B باشد. اگر پیمایش میان ترتیب درخت $ABDCE$ باشد، کدام گزینه نمی‌تواند پیمایش پیش ترتیب آن باشد؟

(۱) $BACDE$ (۲) $BADEC$

(۳) $BADCE$ (۴) $BACED$

۱۲- فرض کنید G گرافی همبند با تعداد فرد راس باشد. کدام شرط تضمین نمی‌کند که گراف اولیری است؟

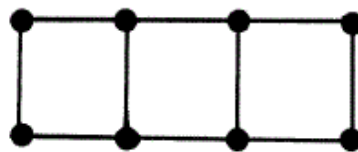
(۱) هر راس روی یک دور باشد.

(۲) درجه هر راس زوج باشد.

(۳) در متمم گراف درجه هر راس زوج باشد.

(۴) هر یال روی تعداد فرد دور قرار داشته باشد.

۱۳- به چند راه می‌توان رأس‌های گراف زیر را با ۳ رنگ متمایز رنگ کرد به طوری که هر دو رأس مجاور ناهم‌رنگ باشند؟



(۱) ۸۱

(۲) ۴۸

(۳) ۱۶۲

(۴) ۳۸۴

۱۴- دنباله $\{a_n\}_{n \geq 0}$ با شرایط اولیه $a_0 = 1$ و $a_1 = 2$ و رابطه بازگشتی

$$\frac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n^2} = 1 + \frac{1}{n}$$

که به ازای هر $n \geq 1$ برقرار است، داده شده است.

تعداد صفرهای سمت راست a_{100} (در نمایش دهدهی) کدام است؟

(۱) ۱۶ (۲) ۲۴

(۳) ۳۰ (۴) ۵۶

۱۵- یک تاس را شبه استاندارد می‌نامیم اگر روی وجه‌های آن، اعداد ۲۴۳ و ۸۱ و ۲۷ و ۹ و ۳ و ۱ نوشته شده باشد. مجموع حاصل از ریختن ۳ تاس شبه استاندارد می‌توان چند عدد مختلف باشد؟

(۱) ۲۷ (۲) ۲۸

(۳) ۵۴ (۴) ۵۶

۱۶- فرض کنید val مجموعه همه ارزش گذاری های گزاره ای تعریف شده روی اتمها و \overline{val} مجموعه همه گسترش های اعضای val به مجموعه همه فرمول های گزاره ای باشد. کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟ (فرض می شود که کاردینال خانواده اتمها χ_0 است.)

$$(۱) \quad |val| = |\overline{val}| = 2^{\chi_0}$$

$$(۲) \quad |\overline{val}| = 2^{\chi_0}, \quad |val| = \chi_0$$

$$(۳) \quad |\overline{val}| = \chi_0, \quad |val| = 2^{\chi_0}$$

$$(۴) \quad |val| = |\overline{val}| = \chi_0$$

۱۷- فرض کنید $L = \{P, Q\}$ که در آن P و Q محمول های تک موضعی هستند. فرض کنید A یک مجموعه ۳ عضوی است. به چند طریق می توان A را به ساختاری برای L تبدیل کرد که در آن تعبیرهای P و Q اشتراک ناتهی داشته باشند؟

$$(۱) \quad ۱۶$$

$$(۲) \quad ۲۷$$

$$(۳) \quad ۳۲$$

$$(۴) \quad ۳۷$$

۱۸- کدام یک از زوج فرمول های زیر با هم هم ارز هستند؟

$$(۱) \quad \langle (A \rightarrow B) \rightarrow A, A \rangle$$

$$(۲) \quad \langle (A \wedge (B \rightarrow C)), (A \wedge B) \rightarrow (A \wedge C) \rangle$$

$$(۳) \quad \langle (A \wedge (B \rightarrow C)), A \rightarrow (B \wedge C) \rangle$$

$$(۴) \quad \langle (A \rightarrow (B \rightarrow C)), (A \rightarrow B) \wedge C \rangle$$

۱۹- تعریف کنید

$$\mathcal{S}(p, q, r) = (p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$$

آنگاه :

(۱) مجموعه $\{\mathcal{S}\}$ کامل است.

(۲) مجموعه $\{\mathcal{S}, \perp\}$ کامل تابعی است اما هیچ زیرمجموعه ی سره آن چنین نیست.

(۳) مجموعه $\{\mathcal{S}, \perp\}$ کامل تابعی است اما هیچ زیرمجموعه ی سره آن چنین نیست.

(۴) مجموعه $\{\mathcal{S}, \perp, \top\}$ کامل تابعی است اما هیچ زیرمجموعه ی سره آن چنین نیست.

۲۰- کدام یک از ادعاهای زیر در مورد دستگاه استنتاج طبیعی (ND) درست نیست؟
 (۱) در هر برهان برای $P \vee \neg P$ از قاعدهی برهان خلف (RAA) استفاده می‌شود.
 (۲) اگر گزاره‌ای برهان داشته باشد آنگاه بی‌نهایت برهان خواهد داشت.
 (۳) حذف قاعدهی برهان خلف (RAA) و افزودن اصل $\neg\neg A \rightarrow A$ قدرت دستگاه را تغییر نمی‌دهد.
 (۴) می‌توان یکی از دو قاعدهی حذف \wedge (∧E) را حذف کرد بدون آنکه دستگاه استنتاج ضعیف شود.

۲۱- با فرض اینکه جمله $q \vee r$ جمله p را نتیجه می‌دهد تعیین کنید با گزاره‌های p, q, r چند جمله دو به دو نا هم ارز می‌توان ساخت؟

۱۶ (۱)	۲۴ (۲)
۳۲ (۳)	۶۴ (۴)

۲۲- فرض کنید $\Sigma = \{p_i \leftrightarrow p_j : i, j \in \mathbb{N}\}$ و $\bar{\Sigma}$ مجموعه نتیجه‌های Σ باشد. آنگاه:

- (۱) Σ کامل نیست و $\bar{\Sigma}$ تصمیم پذیر نیست.
- (۲) Σ کامل نیست و $\bar{\Sigma}$ تصمیم پذیر است.
- (۳) Σ کامل است و $\bar{\Sigma}$ تصمیم پذیر است.
- (۴) Σ کامل است و $\bar{\Sigma}$ تصمیم پذیر نیست.

۲۳- در منطق مرتبه اول، کدام مورد همواره برقرار است؟

- (۱) $\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)$
- (۲) $\vdash (\forall x\varphi \rightarrow \exists x\psi) \leftrightarrow \exists x\exists y(\varphi(x) \rightarrow \psi(y))$
- (۳) $\vdash \exists x(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi)$
- (۴) $\vdash (\forall x\varphi \rightarrow \exists x\psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$

۲۴- کدام گزینه هم ارز نرمال پیشوندی با فرمول زیر است؟

$$\exists x\varphi(x) \rightarrow \forall x\exists y\psi(x, y)$$

- (۱) $\forall x\exists y(\varphi(x) \rightarrow \psi(x, y))$
- (۲) $\forall x\exists y(\neg\varphi(x) \vee \psi(x, y))$
- (۳) $\forall z\forall x\exists y(\psi(z, y) \vee \neg\varphi(x))$
- (۴) $\forall x\forall z\exists y(\varphi(x) \rightarrow \psi(z, y))$

۲۵- مجموعه $\{p \rightarrow (p \leftrightarrow r), q \rightarrow (\neg q \leftrightarrow r)\}$ کدام جمله زیر را نتیجه نمی‌دهد؟

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| ۱) $p \rightarrow \neg q$ | ۲) $p \rightarrow r$ |
| ۳) $\neg q \vee \neg r$ | ۴) $\neg q \wedge \neg r$ |

۲۶- فرمول $\forall x \exists y \forall z \phi$ با کدام یک از فرموهای زیر ناسازگار است؟

- (۱) $\exists x \forall y \exists z \phi$
 (۲) $\exists x \neg \exists y \exists z \phi$
 (۳) $\forall x \exists y \forall z \neg \phi$
 (۴) $\forall x \forall z \exists y \neg \phi$

۲۷- کدام یک از مجموعه‌های زیر از فرمول‌های مرتبه اول ناسازگار است؟

- (۱) $\{\exists y \exists x \forall z (C(x, y, z) \rightarrow \neg C(x, x, x))\}$
 (۲) $\{\forall x (A(x) \rightarrow B(x)), \forall x (A(x) \rightarrow \neg B(x))\}$
 (۳) $\{\forall x A(x)\} \cup \{\neg A(t) : t \text{ یک ترم}\}$
 (۴) $\{\forall x \exists y B(x, y) \rightarrow \neg \exists y \forall x B(x, y), \exists x B(x, x)\}$

۲۸- کاردینال مجموعه همه رابطه‌های منطقی چون * که رابطه‌های \rightarrow و \sim را بتوان

بر حسب * نوشت، چند است؟

- (۱) ۰
 (۲) ۱
 (۳) ۲
 (۴) نامتناهی است

۲۹- کدام یک از مجموعه‌های زیر از فرمول‌های گزاره‌ای، سازگار است؟

- (۱) $\{p_1 \rightarrow p_2, \neg p_2 \rightarrow \neg p_1, p_1 \wedge \neg p_2\}$
 (۲) $\{(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi : \psi, \phi \text{ فرمول‌های گزاره‌ای}\}$
 (۳) $\{p_1 \rightarrow p_2, p_1 \rightarrow \neg p_2, p_1 \wedge p_2\}$
 (۴) $\{p_1 \rightarrow (\neg p_2 \rightarrow p_2), (p_1 \vee p_2) \rightarrow \neg p_2, p_1 \rightarrow (\neg p_2 \rightarrow p_2)\}$

۳۰- کدام یک از مجموعه‌های زیر از فرمول‌های گزاره‌ای کامل نیست؟

- (۱) $\{p_1, p_1 \leftrightarrow p_2, p_2 \leftrightarrow p_3, \dots\}$
 (۲) $\{\neg p_1, p_1 \vee p_2, p_1 \vee p_2 \vee p_3, \dots\}$
 (۳) $\{p_1 \downarrow p_2, p_2 \downarrow p_3, p_3 \downarrow p_4, \dots\}$ (که در آن \downarrow رابط Nor است)
 (۴) $\{P_1, P_2, P_3, \neg(p_1 \vee p_2 \vee p_3)\}$

۳۱- اگر برنامه زیر، $f(x)$ را محاسبه کند، مقدار $f(5)$ چقدر است؟

```

IF x ≠ 0 Goto A
Goto E
[A] x ← x - 1
  IF x ≠ 0 Goto B
  Y ← Y + 1
  Goto E
[B] x ← x - 1
  IF x ≠ 0 Goto A
  Goto E
    
```

- (۱)
- ۱ (۲)
- ۲ (۳)
- ۵ (۴)

۳۲- فرض کنید که برنامه P عدد $1 - 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11^4$ باشد. در این صورت برنامه P:

- (۱) حداقل دارای ۵ خط دستور است.
- (۲) دارای یک دستور برچسب‌دار است.
- (۳) برای ورودی $x_1 = 2$ خروجی ۱ را می‌دهد.
- (۴) برای ورودی $x_1 = 0$ خروجی ۰ را می‌دهد.

۳۳- فرض کنید A، B و C سه مجموعه دو بدو مجزا هستند. (یعنی $A \cap B = B \cap C = A \cap C = \emptyset$) توابع محاسبه‌پذیر جزئی به صورت زیر تعریف شده‌اند.

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \cup B \\ 2 & x \in C \\ \uparrow & o.w \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} \uparrow & x \in A \cup C \\ 0 & o.w \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} \uparrow & x \in B \cup C \\ 0 & o.w \end{cases}$$

کدام گزاره صحیح است؟

- (۱) A، B و C همگی مجموعه‌های بازگشتی هستند.
- (۲) A، B و C هیچ‌کدام r.e نیستند.
- (۳) A، B و C همگی مجموعه‌های r.e هستند ولی هیچ‌کدام بازگشتی نیستند.
- (۴) C بازگشتی است ولی A و B بازگشتی نیستند.

-۳۴- قرار دهید:

$$FIN = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ و } W_x \text{ متناهی است}\}$$

$$TOT = \{x \mid \Phi_x \text{ تابع تام است}\}$$

$$K = \{x \mid \Phi_x(x) \downarrow\}$$

کدام گزاره صحیح است؟

$$(1) K \not\leq_m TOT \text{ و } \bar{K} \not\leq_m FIN$$

$$(2) K \leq_m TOT \text{ و } \bar{K} \not\leq_m FIN$$

$$(3) K \leq_m TOT \text{ و } \bar{K} \leq_m FIN$$

$$(4) K \not\leq_m TOT \text{ و } \bar{K} \leq_m FIN$$

-۳۵- کدام گزاره غلط است؟

(۱) مجموعه‌های r.e تحت اشتراک و اجتماع بسته هستند.

(۲) $\{M_i \text{ ها ماشین تورینگ هستند و } V = \{(M_1, M_2, M_3) \mid L(M_1) = L(M_2)L(M_3)\}$ یک مجموعه r.e. نیست.(۳) مجموعه $\{M\}$ یک ماشین تورینگ است که روی ورودی W می‌ایستد $S = \{(M, w) \mid \text{یک مجموعه r.e. نیست.}\}$ (۴) مجموعه $\{M_i \text{ ها ماشین تورینگ هستند و } T = \{(M_1, M_2) \mid L(M_1) \cap L(M_2) = \emptyset\}$ یک مجموعه r.e. است.

-۳۶- کدام گزاره صحیح است؟

$$(1) \text{ اگر } A \subseteq B \text{ آنگاه } A \leq_m B.$$

(۲) مجموعه بازگشتی و m -کامل موجود است.(۳) $\{\Phi_x \text{ تابع یک به یک نیست } A = \{x \mid \text{یک مجموعه r.e. است.}\}$ (۴) اگر A یک مجموعه r.e باشد که \bar{A} نامتناهی و شامل هیچ مجموعه r.e نامتناهی نباشد، آنگاه A بازگشتی نیست.

-۳۷- کدام گزینه غلط است؟

 \leq_t Turing reducibility \leq_m many – one reducibility \leq_1 one – one reducibility

$$(1) \leq_1 \subseteq \leq_t \subseteq \leq_m$$

(۲) هر سه رابطه بازتابی و تراگذری هستند.

$$(3) A \leq_m B \text{ اگر و تنها اگر } \bar{A} \leq_m \bar{B}$$

(۴) اگر $A \leq_m B$ و A r.e نباشد آنگاه B نیز r.e نیست.

۳۸- برای $A \subseteq \mathbb{N}$ قرار دهید $a = \deg_T(A) = \{B \mid B \equiv_T A\}$ و $D = \{\deg_T(A) \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$. برای (D, \leq) که در آن $A \leq_T B$ اگر و تنها اگر $a \leq b$ باشد، کدام گزینه غلط است؟

- (۱) (D, \leq) یک شبکه توزیع پذیر است.
- (۲) (D, \leq) کراندار است (یعنی دارای مینیمم و ماکزیمم است)
- (۳) (D, \leq) یک نیم شبکه فصلی است.
- (۴) عضو ماکسیمم (D, \leq) درجه مسئله توقف است.

۳۹- برای دو مجموعه A و B تعریف می کنیم:

$$A \oplus B = \{2n \mid n \in A\} \cup \{2n+1 \mid n \in B\}$$

کدام گزینه غلط است؟

- (۱) $B \leq_T A \oplus B$, $A \leq_T A \oplus B$
- (۲) $(A \oplus B) \oplus C \equiv_T A \oplus (B \oplus C)$
- (۳) مجموعه‌های ساده A (simple) و B موجودند که $(A \oplus B)$ ساده نباشد.
- (۴) اگر $A \leq_T C$, $B \leq_T C$ آنگاه $A \oplus B \leq_T C$

۴۰- کدام گزینه غلط است؟

- (۱) تابع محاسبه پذیر f چنان موجود است، که برای هر y داریم $\Phi_{f(x)}(y) = \neg \Phi_x(y)$.
- (۲) مجموعه‌ی محاسبه ناپذیر A چنان موجود است که $A \leq_m \bar{A}$
- (۳) محمول محاسبه پذیر $R(x, y)$ موجود است که $\{y \mid (\forall t)R(t, y)\}$ مجموعه $r.e$ نیست.
- (۴) اگر محمول $H(x)$ فقط موقعی درست باشد که برنامه‌ی با کد $r(x)$ روی ورودی $l(x)$ متوقف شود، آنگاه H یک محمول محاسبه پذیر است.

۴۱- کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) تست کردن اینکه یک تابع، تابع ثابتی است تصمیم پذیر است.
- (۲) تست کردن اینکه خروجی دو تابع دلخواه داده شده یکسان است تصمیم پذیر است.
- (۳) تست کردن اینکه دامنه یک تابع محاسبه پذیر جزئی متناهی است تصمیم پذیر است.
- (۴) تست کردن اینکه دامنه یک تابع محاسبه پذیر جزئی هم - متناهی (cofinite) است تصمیم ناپذیر است.

۴۲- اگر $P = NP$ باشد، آنگاه هر زبان متعلق به P ،
 (۱) NP - کامل است.

(۲) NP - کامل است بجز \emptyset و Σ^*

(۳) NP - کامل است بجز \emptyset

(۴) NP - کامل است بجز Σ^*

۴۳- کدام یک از زبان‌های زیر قابل تشخیص توسط یک ماشین تورینگ هستند. M یک ماشین تورینگ است.

i : $L_H = \{\text{cod}(M) \neq x \mid x \in \{0,1\}^*\}$ روی M توقف می‌کند و

ii : $L_{\text{empty}} = \{\text{cod}(M) \mid L(M) = \emptyset\}$

iii : $L_{MM'} = \{\text{cod}(M) \neq \text{cod}(M') \mid L(M) \subseteq L(M')\}$

iv : $L = \{\text{cod}(M) \mid 010 \notin L(M)\}$

v : $L = \{\text{cod}(M) \mid 010 \in L(M)\}$

(۱) i و ii

(۲) ii و iv

(۳) فقط v

(۴) v و iv و ii

۴۴- کدام یک از مسائل زیر **unsolvable** نیست؟

(۱) تست اینکه یک برنامه دلخواه روی یک ورودی خاص توقف می‌کند.

(۲) تعیین اینکه یک اتومات‌ها با پایان داده شده برای یک زبان، مینیمم است.

(۳) چاپ تمام جملات درست درباره ریاضیات که هیچ کدام غلط نیست.

(۴) تعیین اینکه یک جمله از منطق محمولات مرتبه اول معتبر است یا نه.

۴۵- فرض کنید $A \subseteq \mathbb{N}$ ، کدام یک از گزاره‌های زیر با بقیه معادل نیست؟

(۱) A دامنه یک تابع محاسبه‌پذیر است.

(۲) A برد یک تابع محاسبه‌پذیر است.

(۳) A توسط یک فرمول Σ_1 قابل تعریف است.

(۴) A توسط یک فرمول Π_1 قابل تعریف است.