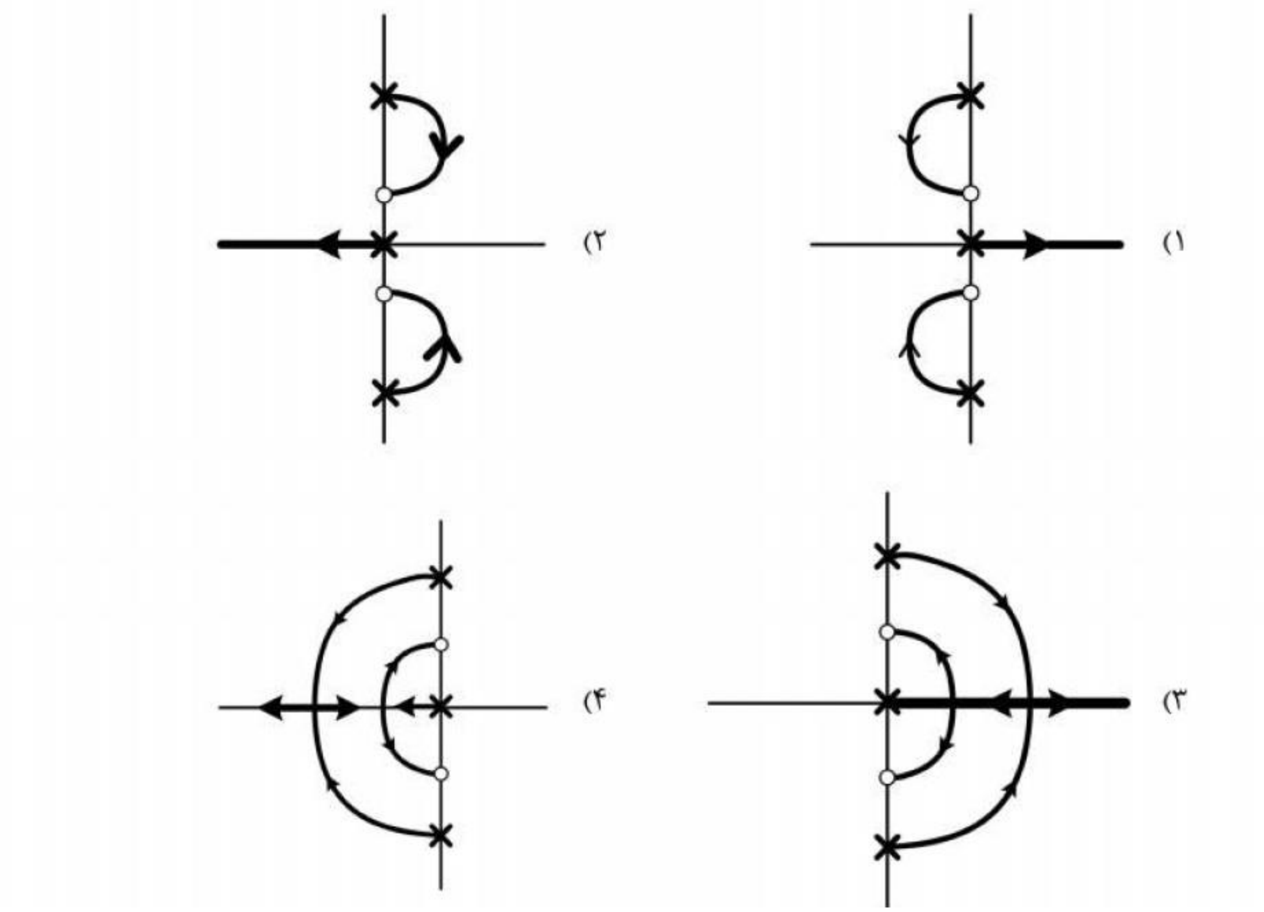
۳- رابطهٔ $G(s)H(s)=\dfrac{k(s^{۲}+۰/۱)}{s(s^{۲}+۱)}$ مفروض است. کدام دیاگرام، مکان‌هندسی ریشه‌ها را به درستی برای $k>۰$ نشان می‌دهد؟



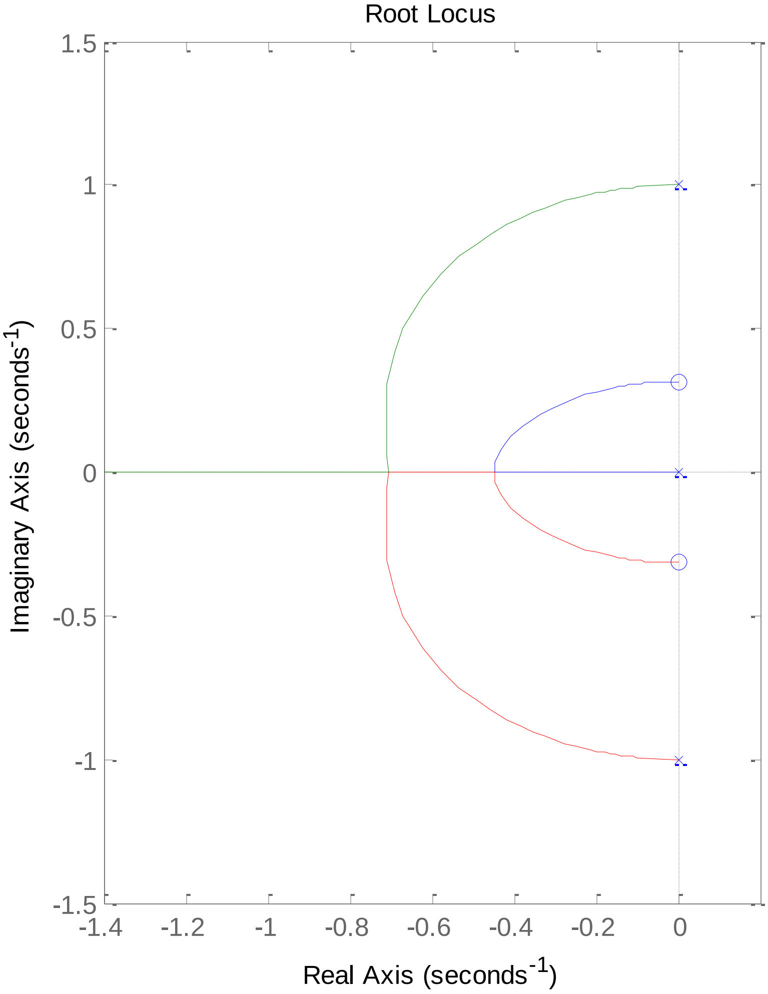
توضیح: در کلید اولیهٔ سازمان سنجش گزینه ۱ بعنوان پاسخ تست انتخاب شده ولی با توجه به توضیحات ذکر شده در قسمت ذیل بنظر میرسد که گزینهٔ اعلام شده نادرست است و باید به گزینهٔ ۴ اصلاح گردد.

حل سوال ۳- با توجه به مثبت بودنِ K و منفی بودنِ علامت مقایسه‌گر، قواعد فیدبک منفی بر منحنی RL این سیستم حاکم است و لذا گزینه‌های ۱ و ۳ بدلیل نمایش نادرست موقعیت RL روی محور Re حذف میشوند. در نهایت با توجه به تفاوت زاویه خروج در گزینه های ۲ و ۴ تنها کافیست همین کمیت را بیابیم:

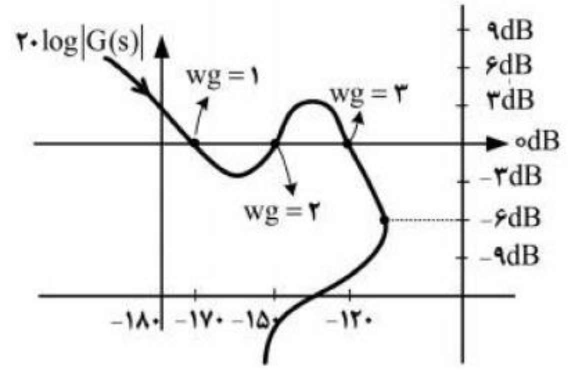
$$\phi_{s=+j} = \pi - \left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲}\right) + \left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \phi_{s=+j} = \pi$$

که این زاویه تنها در گزینه ۴ بدرستی نمایش داده شده است (البته با محاسبه مختصات نقطه زینی نیز میتوانستیم به همین گزینه برسیم). در ذیل کد MATLAB متناظر با تابع تبدیل موجود در این سوال نیز به نمایش در آمده است:

```
clc;close all;clear all;
s=tf('s');
sys = (s^2+0.1)/(s*(s^2+1))
rlocus(sys)
```



۷- منحنی اندازه برحسب فاز یک سیستم در شکل زیر قرار دارد، به ازای چه بهره‌ای (**k**) حد فاز سیستم حداکثر می‌شود و اگر سیستم تأخیردار شود ماکزیمم تأخیر موجود برای پایداری سیستم، کدام است؟ (تأخیر از جنس e^{-Ts} می‌باشد.)



G(jw)

۱) $T_{max} = \frac{\pi}{18}$, $k = \frac{1}{2}$

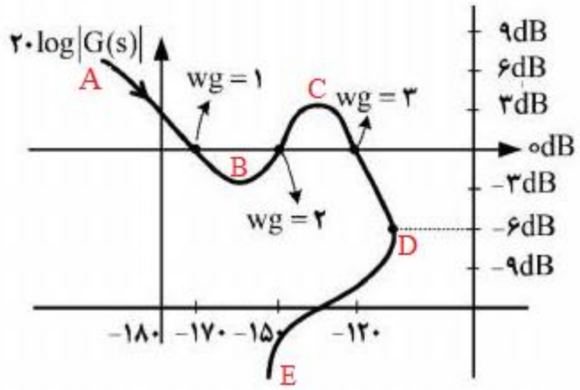
۲) $T_{max} = \frac{\pi}{9}$, $k = \frac{1}{2}$

۳) $T_{max} = \frac{\pi}{18}$, $k = 2$

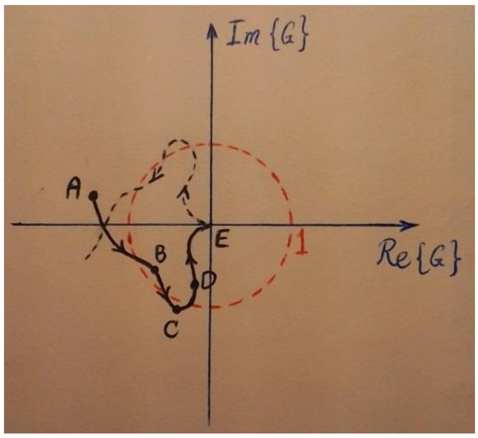
۴) $T_{max} = \frac{\pi}{9}$, $k = 2$

توضیح: در کلید اولیهٔ سازمان سنجش گزینه ۳ بعنوان پاسخ تست انتخاب شده ولی با توجه به توضیحات ذکر شده در قسمت ذیل بنظر میرسد که بدلیل کامل نبودن اطلاعات موجود در صورت سوال این سوال پاسخ یکتا ندارد.

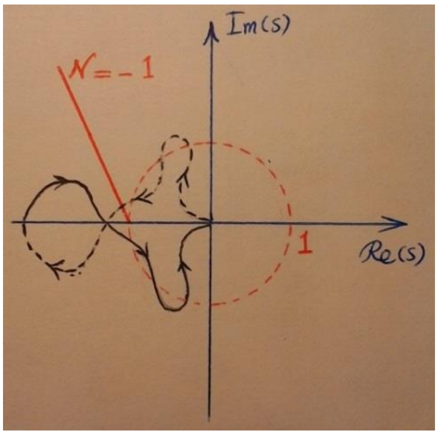
حل سوال ۷- شکل زیر دیاگرام قطبی **متناظر با قسمت معلوم** از دیاگرام نیکولز را به تصویر می‌کشد:



$\Rightarrow$



با توجه به **مشخص نبودنِ رفتار دقیقِ** فرکانس-پایینِ دیاگرام نیکولز، یکی از حالاتی که دیاگرامِ قطبی فوق میتواند تکمیل گردد، بصورت زیر می‌باشد:



با توجه به دیاگرام فوق و به موجب معیار پایداری نایکوییست (Z=P+N)، این سیستم دارایِ $Z=P-۱>۰$ قطب ناپایدار حلقه بسته می‌باشد[۱]. **به بیان دیگر، این سیستم حتی پیش از افزودن عاملِ تاخیر نیز ناپایدار بوده، و لذا در حال حاضر پاسخ یکتایی برای آن وجود ندارد**[۲].

مثال نقض: یک تابع تبدیل نوعی که با تقریب خوبی منجر به دیاگرام نیکولز مطرح شده در صورت این سوال می‌گردد، بصورت $G(s)=\dfrac{(s+۰.۶)(s+۰.۷۵)(s+۰.۸)}{(s+۰.۰۰۰۱)(s-۰.۰۰۰۱)(s-۲.۵)(s+۴)(s+۱۰۰)}$ تخمین زده می‌شود که حتی پیش از افزوده شدن عامل تاخیر نیز ناپایدار است و برای شبیه سازی آن می‌توان از کد MATLAB زیر کمک گرفت:

```
clc;close all;clear all;
s=tf('s');
num=(s+0.6)*(s+0.75)*(s+0.8);
den=(s+0.0001)*(s-0.0001)*(s-2.5)*(s+4)*(s+100);
sys=600*num/den
w=logspace(-4,4,10000);
nichols(sys,w);figure
margin(sys);
```

۱- برای اثبات شرط $P\geq ۲$ کافیست به این نکته توجه کنیم که نواحی AB و CD از دیاگرام نیکولز، بدلیل **افزایش زاویهٔ توأم با کاهش اندازه**، هر یک متناظر با تعدادی قطب حلقه باز ناپایدار در RHP هستند و بنابراین **P الزاماً عددی بزرگتر یا مساوی ۲ می‌باشد**.

۲- پرواضح است چنانچه مانند تست ۱۱ کنکور ارشد برق سال ۱۳۸۹، پاسخ فرکانسی این سوال نیز **بطور کامل** مشخص شده بود، آنگاه همان گزینهٔ ۳ **پاسخ یکتای** تست می‌بود.

۹- برای سیستم $\begin{cases}\dot{x}=\begin{pmatrix}۴ & ۰\\ ۰ & ۳\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}۱\\ ۰\end{pmatrix}u(t)\\ y(t)=(۲\quad ۳)x(t)\end{cases}$، فیدبک حالت $k=(k_۱\quad k_۲)$ را اعمال می‌کنیم. با فرض $u(t)=r(t)-kx(t)$، کدام مورد درست است؟

۱) برای $k_۱\neq ۴$، سیستم حلقه بسته کنترل‌پذیر می‌گردد.

۲) $k_۲$ تأثیری برمحل مقادیر ویژهٔ سیستم با فیدبک حالت ندارد.

۳) به ازای تمام مقادیر $k_۱$ سیستم حلقه بسته با فیدبک حالت ناپایدار است.

۴) با تعیین مقدار مناسب $k_۱$ می‌توان در پاسخ پله سیستم با فیدبک حالت، بالازدگی مناسب $(\zeta<۱)$ را به‌دست آورد.

توضیح: در کلید اولیهٔ سازمان سنجش گزینه ۲ بعنوان پاسخ تست انتخاب شده ولی با توجه به توضیحات ذکر شده در قسمت ذیل بنظر میرسد که علاوه بر گزینه ۲ ، گزینهٔ ۳ نیز صحیح میباشد.

حل سوال ۹- با اعمال فیدبک حالت خواهیم داشت: $u(t)=r(t)-k_۱x_۱(t)-k_۲x_۲(t)$ و بنابراین معادلات حالت سیستم پس از اعمال فیدبک حالت بصورت زیر ساده میشوند:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_۱\\ \dot{x}_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix}\times(r-k_۱x_۱-k_۲x_۲)\quad\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}\dot{x}_۱\\ \dot{x}_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴-k_۱ & -k_۲\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix}\times r$$

بنابراین پس از اعمال فیدبک حالت، ماتریسهای جدید توصیف کنندهٔ سیستم بصورت زیر بدست می‌آیند و خواهیم داشت:

$$A=\begin{bmatrix}۴-k_۱ & -k_۲\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix}\quad,\quad C=\begin{bmatrix}۲ & ۳\end{bmatrix}\quad,\quad D=۰$$

گزینهٔ ۱ نادرست است زیرا دترمینان ماتریس کنترل پذیریِ ϕ_C همواره و بازای کلیهٔ مقادیر $k_۱$ صفر است:

$$\phi_C=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۴-k_۱\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \det(\phi_C)=۰$$

گزینهٔ ۲ صحیح است زیرا ریشه‌های معادلهٔ مشخصه (مقادیر ویژهٔ سیستم)، صرفاً تابع مقدار $k_۱$ هستند:

$$\det(sI-A)=\det\begin{bmatrix}s+k_۱-۴ & k_۲\\ ۰ & s-۳\end{bmatrix}=s^۲+(k_۱-۷)s+۳(۴-k_۱)$$

گزینهٔ ۳ صحیح است زیرا بازای کلیهٔ مقادیر $k_۱$، ریشه‌های معادلهٔ مشخصهٔ فوق بصورت $s_۱=+۳$ و $s_۲=۴-k_۱$ بدست می‌آید که وجود مُد ناپایدارِ $s_۱=+۳$، معادل با ناپایداری همیشگی این سیستم بازای کلیهٔ مقادیر $k_۱$ می‌باشد.

گزینهٔ ۴ نادرست است زیرا وقتی سیستم بازای کلیهٔ مقادیر $k_۱$ ناپایدار می‌باشد، تعریف بالازدگی نیز برای آن بی‌معنا خواهد بود.

۱۱- کدام کنترل کنندهٔ $G_c(s)$ می‌تواند شرایط خواسته شده در سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز $G(s)=\frac{1}{s^2+1}$ را برآورده سازد؟

الف: خطای حالت دائم برای ورودی شیب کمتر از ده درصد گردد.

ب: پاسخ پله سریعترین پاسخ بدون بالازدگی باشد.

۱) $G_c(s)=\frac{40(s+0/1)}{s+10}$

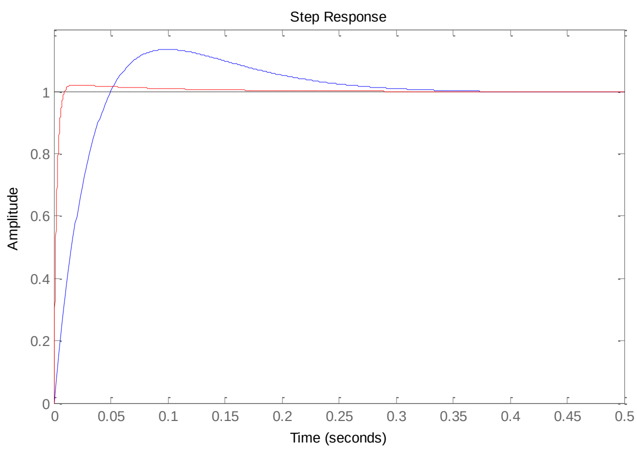
۲) $G_c(s)=\frac{40(s+0/1)(s+10)}{s}$

۳) $G_c(s)=\frac{400(s+0/1)}{s}$

۴) $G_c(s)=\frac{400(s+0/1)(s+10)}{s}$

توضیح: در کلید اولیهٔ سازمان سنجش گزینه ۲ بعنوان پاسخ تست انتخاب شده ولی با توجه به توضیحات ذکر شده در قسمت ذیل بنظر میرسد که این سوال دارای گزینهٔ صحیح نمی باشد (و حتی اگر بنا به انتخاب نزدیکترین گزینه باشد، گزینه ۴ صحیحتر از گزینه ۲ می‌باشد).

حل سوال ۱۱- گزینه ۱ سیستمی از تیپ صفر است که توانایی تعقیب ورودی شیب را ندارد و بنابراین نمیتواند پاسخ تست باشد. گزینه ۳ نیز نمیتواند پاسخ تست باشد زیرا معرف سیستمی ناپایدار است. گزینه های ۲ و ۴ نیز نمیتوانند پاسخ تست باشند زیرا اگر پاسخ پله این دو سیستم توسط نرم افزار MATLAB ترسیم شود (همانطور که در شکل زیر و کد MATLAB نیز نمایش داده‌ایم)، **هر دو گزینه دارای مقداری فراجهش** هستند و حتی اگر قرار باشد بین گزینه‌های ۲ و ۴، گزینه "صحیحتر" انتخاب شود، گزینه ۴ می‌باید انتخاب گردد زیرا علاوه بر **فراجهش کمتر**، از "**سرعت بالاتری**" نیز برخوردار است.



نمودار قرمز: پاسخ پله سیستم جبرانسازی شده توسط گزینه ٤

نمودار آبی: پاسخ پله سیستم جبرانسازی شده توسط گزینه ۲

کد زیر نادرستی سوال ۱۱ کنترل دکترای ۹۴ را اثبات میکند (**توضیح:** هر یک از چهار نمودار تولید شده توسط کد زیر بترتیب نمودارهای پاسخ شیب، پاسخ پله و نمودار مکان ریشه‌های هر یک از گزینه های ۱ تا ۴ را به تصویر می‌کشد):

```
clc;close all;clear all;
G=zpk([],[j -j],1);
%% Choice #1
K1=zpk([-0.1],[-10],40);
subplot(1,3,1);rlocus(K1*G/40);
sys1=feedback(G*K1,1);
t=0:1e-3:15  ;   ramp=1*t;
subplot(1,3,2);step(sys1,t);
subplot(1,3,3);lsim(sys1,ramp,t);figure
%% Choice #2
K2=zpk([-0.1 -10],[0],40);
subplot(1,3,1);rlocus(K2*G/40);
sys2=feedback(G*K2,1);
t=0:1e-3:1  ;   ramp=1*t;
subplot(1,3,2);step(sys2,t);
subplot(1,3,3);lsim(sys2,ramp,t);figure
%% Choice #3
K3=zpk([-0.1],[0],400);
subplot(1,3,1);rlocus(K3*G/400);
sys3=feedback(G*K3,1);
t=0:1e-3:3  ;   ramp=1*t;
subplot(1,3,2);step(sys3,t);
subplot(1,3,3);lsim(sys3,ramp,t);figure
%% Choice #4
K4=zpk([-0.1 -10],[0],400);
subplot(1,3,1);rlocus(K4*G/400);
sys4=feedback(G*K4,1);
t=0:1e-4:0.5  ;   ramp=1*t;
subplot(1,3,2);step(sys4,t);
subplot(1,3,3);lsim(sys4,ramp,t);
```