بسمه تعالی

پاسخ تشریحی سؤالات کنکور دکتری ۱۳۹۴ بر مبنای دفترچه F

۱) گزینه ۴ صحیح است.

ورودی محدود است، پس خروجی نیز باید محدود باشد تا سیستم پایدار شود. پس گزینه ۳ حذف می‌شود. از طرف دیگر چون سیستم خطی و ضدعلی است، اگر ورودی از لحظه‌ای به بعد برابر صفر باشد، خروجی نیز از آن لحظه به بعد باید برابر صفر باشد (سکون نهایی). ورودی از لحظه صفر به بعد برابر صفر است، پس خروجی نیز باید برای لحظات صفر به بعد برابر صفر باشد. در نتیجه از بین گزینه‌های ۱ و ۲ و ۴، فقط گزینه ۴ باقی می‌ماند.

روشی که بیان شد، روش سریع تستی حل این سؤال بود. روش تشریحی به این صورت است که باید تابع تبدیل سیستم را با ورودی داده شده و خروجی‌های داده شده در گزینه‌ها محاسبه کنیم و سپس با استفاده از تابع تبدیل و ناحیه همگرایی آن، در مورد پایداری و ضدعلی بودن سیستم اظهار نظر نماییم. البته به‌صورت ذهنی و تقریبی نیز می‌توان این کار را انجام داد.

۲) گزینه ۳ صحیح است.

۳) گزینه ۴ صحیح است.

$$x_3(t) = x_1(t)+2x_1(t-1)+3x_1(t-2)+\cdots \quad \Rightarrow \quad T\{x_3(t)\} = x_2(t)+2x_2(t-1)+3x_2(t-2)+\cdots$$

۴) گزینه ۱ صحیح است.

$$y[n] = g[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} g[k]h[n-k]$$

$$y[0] = \sum_{k=0}^{0} g[k]h[0-k] = g[0]\underbrace{h[0]}_{1} = g[0] = 1$$

$$y[1] = \sum_{k=0}^{1} g[k]h[1-k] = \underbrace{g[0]}_{1}\underbrace{h[1]}_{\frac{1}{2}} + g[1]\underbrace{h[0]}_{1} = \frac{1}{2} + g[1] = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad g[1] = 0$$

۵) گزینه ؟ صحیح است.

$$y[n] \equiv x(nT) = x(0.8n) = \cos(4.8\pi n) + 2\sin(1.2\pi n) = \cos(1.2\pi n) + 2\sin(1.2\pi n)$$

دوره تناوب سیگنال فوق برابر صورت کسر $\frac{2\pi}{1.2\pi} = \frac{5}{3}$ یعنی $N = 5$ و فرکانس اصلی آن نیز برابر $\omega_0 = \frac{2\pi}{5} = 0.4\pi n$ می‌باشد. در نتیجه سیگنال مذکور فقط ضریب $a_3 = a_{-2}$ و $a_{-3} = a_2$ را دارا می‌باشد که با بسط نمایی آن به‌دست خواهند آمد و مسلماً مطابق هیچ‌کدام از گزینه‌ها نیست.

۶) گزینه ۱ صحیح است.

ابتدا از دو طرف تبدیل فوریه داده شده، عکس تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\frac{۱}{۲})^{|k|}e^{j۳kt}+e^{jt}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\frac{۱}{۳})^{|k|}e^{j۳kt}+e^{j۲t}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\frac{۱}{۴})^{|k|}e^{j۳kt}$$

دوره تناوب سیگنال $x(t)$ برابر $T=۲\pi$ و فرکانس اصلی آن برابر $\omega_۰=۱$ می‌باشد. پس ضریب نمایی $e^{jk\omega_۰t}=e^{jkt}$ در طرف راست تساوی فوق، برابر a_k می‌باشد. در نتیجه $a_۳=\frac{۱}{۲}$، $a_۴=\frac{۱}{۳}$ و $a_۵=\frac{۱}{۴}$ می‌باشد و در نتیجه $\sum_{k=۳}^{۵}a_k=\frac{۱۳}{۱۲}$ می‌باشد.

۷) گزینه ۱ صحیح است.

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}|y(t)-x(t)|^۲dt=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|Y(\omega)-X(\omega)|^۲d\omega$$

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=X(\omega)\prod(\frac{\omega}{۴\pi})$$

پس $Y(\omega)-X(\omega)$ فقط شامل $X(\omega)$ در بازه $۲\pi<|\omega|<۳\pi$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$I=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|Y(\omega)-X(\omega)|^۲d\omega=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-۳\pi}^{-۲\pi}|X(\omega)|^۲d\omega+\frac{۱}{۲\pi}\int_{۲\pi}^{۳\pi}|X(\omega)|^۲d\omega=۱$$

۸) گزینه ۴ صحیح است.

باید گزینه‌ای را انتخاب نماییم که تبدیل فوریه آن در هیچ فرکانسی، صفر نشود که فقط گزینه ۴ این‌چنین است. توجه کنید که گزینه ۲ تبدیل فوریه ندارد!

۹) گزینه ۱ صحیح است.

اگر تأخیر را سه برابر کنیم، کافی است که به‌جای z، $z^۳$ قرار دهیم. بنابراین تابع تبدیل جدید برابر $H(z^۳)$ و در نتیجه پاسخ فرکانسی آن برابر $H(۳\omega)$ خواهد بود. یعنی $H(\omega)$ با ضریب ۳ فشرده می‌شود. بنابراین دوره تناوب آن به‌جای ۲π، $\frac{۲\pi}{۳}$ خواهد بود.

۱۰) گزینه ۳ صحیح است.

۱۱) گزینه ۴ صحیح است.

$H(۰)=-\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. پس تابع تبدیل این سیستم علی برابر است با:

$$H(s)=\frac{s-۱}{s^۲+۳s+۲}=\frac{s-۱}{(s+۲)(s+۱)}\ ,\ \ Re[s]>-۱$$

از آنجا که $s=-۳$ در ناحیه همگرایی $H(s)$ و در نتیجه ناحیه همگرایی $sH(s)$ نیست، داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}h'(t)e^{۳t}dt=sH(s)\Big|_{s=-۳}=\infty$$

۱۲) گزینه ۲ صحیح است.

$$s[n]=\delta[n]+ah[n-1] \xrightarrow{\mathcal{Z}} S(z)=1+az^{-1}H(z)$$

از طرف دیگر می‌دانیم که $S(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}H(z)$ می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1-z^{-1}}H(z)=1+az^{-1}H(z) \quad\Rightarrow\quad H(z)=1-z^{-1}+(az^{-1}-az^{-2})H(z)$$

$$\Rightarrow \quad H(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-az^{-1}+az^{-2}}=\frac{z^{2}-z}{z^{2}-az+a}$$

طبق صورت تست، سیستم علی است؛ پس شرایط قضیه مقدار اولیه برقرار است. در نتیجه داریم:

$$h[0]=\lim_{z\to\infty}H(z)=1$$

همچنین اگر سیستم پایدار نیز باشد (باید در صورت تست اشاره می‌شد!)، حتماً همه قطب‌های $H(z)$ و همچنین قطب‌های $(1-z^{-1})H(z)$ در داخل دایره یکه قرار می‌گیرند (زیرا سیستم علی و پایدار می‌شود).

در نتیجه با توجه به قضیه مقدار نهایی داریم:

$$h[+\infty]=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})H(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\cdot\frac{z^{2}-z}{z^{2}-az+a}=0$$

توجه کنید که اگر همه قطب‌های $(1-z^{-1})H(z)$ در داخل دایره یکه قرار نمی‌گرفتند، طبق قضیه مقدار نهایی، $h[+\infty]=\infty$ می‌شد که در گزینه‌ها نیست.

۱۳) گزینه ۳ صحیح است.

$$Y(z)=X(z)H\left(\frac{z}{\alpha}\right) \quad\Rightarrow\quad H_T(z)=H\left(\frac{z}{\alpha}\right) \quad\Rightarrow\quad h_T[n]=\alpha^{n}h[n]$$

۱۴) گزینه ۲ صحیح است.

$$y[n]=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}x[n-4k]=x[n]*\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\delta[n-4k]=x[n]*\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{4}}\delta[n-4k]$$

$$\Rightarrow\quad y[n]=x[n]*\left((0/5)^{\frac{n}{4}}\sum_{k=0}^{+\infty}\delta[n-4k]\right) \xrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z)=X(z)\frac{1}{1-\left(\dfrac{z}{(0/5)^{\frac{1}{4}}}\right)^{-4}}$$

۱۵) گزینه ۴ صحیح است.