315

D

315D

نام:

نام خانوادگی:

محل امضا:

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.

امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران

وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری

سازمان سنجش آموزش کشور

صبح جمعه

۹۳/۱۲/۱۵

دفترچه شماره ۱ از ۲

آزمون ورودی
دوره‌های دکتری (نیمه متمرکز) داخل ـ سال ۱۳۹۴

ریاضی محض
(کد ۲۲۳۳)

تعداد سؤال: ۴۵ — مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی (مبانی آنالیز ریاضی ـ آنالیز ریاضی ـ جبر خطی ـ جبر ۱ـ جبر پیشرفته ـ آنالیز حقیقی ۱)	۴۵	۱	۴۵

این آزمون نمرهٔ منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

اسفند ماه ـ سال ۱۳۹۳

۱- در مورد سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ کدام گزینه درست است؟

۱) سری همگرای مطلق است.
۲) سری همگرای مشروط است.
۳) مجموع جزئی سری کران داراست ولی واگراست.
۴) مجموع جزئی سری بی‌کران است.

۲- به ازای $a > 0$، مقدار $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{a^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{a^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{\ln a}$
۲) $\frac{a-1}{\ln a}$
۳) $\frac{a}{\ln a}$
۴) $\frac{a+1}{\ln a}$

۳- فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^n$ فشرده و $f: X \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد که برای هر $t \in \mathbb{R}$ ، مجموعهٔ $f^{-1}[t,\infty)$ بسته است. کدام گزینه درست است؟

۱) $x_0 \in X$ وجود دارد به طوری که $f(x_0) = \sup_{x\in X} f(x) < \infty$.
۲) ممکن است تابع f سوپرمم و اینفیمم خود را بر X نگیرد.
۳) $y_0 \in X$ وجود دارد به طوری که $f(y_0) = \inf_{x\in X} f(x) > -\infty$.
۴) f کران‌دار است.

۴- اگر $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در نقطه $x=a$ مشتق‌پذیر باشند و $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ تعریف شده باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $f(a)=g(a)$ آنگاه h در a مشتق‌پذیر است.

۲) اگر h در a مشتق‌پذیر باشد آنگاه $f(a)\neq g(a)$

۳) اگر $f(a)\neq g(a)$ آنگاه h در a مشتق‌پذیر است.

۴) اگر h در a مشتق پذیر باشد آنگاه $g'(a)=f'(a)$

۵- فرض کنید $f:\mathbb{R}\to[\circ,\infty)$ پیوسته و انتگرال ریمان ناسره $\int_{\circ}^{+\infty} f(t)dt$ همگرا باشد. مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{\circ}^{n} x f(x)dx$ کدام است؟

۱) صفر

۲) $+\infty$

۳) ۱

۴) موجود نیست.

۶- فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $f:X\to X$ تابعی پیوسته باشد به‌طوری‌که به ازای هر دو عضو متمایز x و y در X، $d(f(x),f(y))<d(x,y)$. کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر X فشرده باشد آنگاه f نقطه ثابت دارد.

۲) ممکن است f نقطهٔ ثابت نداشته باشد.

۳) اگر $x_{\circ}\in X$ وجود داشته باشد که $\{f^n(x_{\circ}):n\in\mathbb{N}\}$ نقطه حدی داشته باشد، آنگاه f نقطه ثابت دارد $(f^n=fof\dots of)$.

۴) اگر X فشرده باشد، آنگاه ثابت $\circ<\alpha<1$ وجود دارد که به ازای هر دو نقطه x و y در X داریم $d(f(x),f(y))\leq\alpha d(x,y)$

۷- نقیض گزارهٔ زیر کدام است؟

دنبالهٔ توابع حقیقی $\{f_n\}$ بر مجموعهٔ X به‌طور یکنواخت به تابع f میل می‌کند. ($\varepsilon>\circ$ و $n,N\in\mathbb{N}$ فرض شده‌اند.)

۱) $\forall\varepsilon\ \forall N\ \exists n\ \exists x\ (x\in X\ \&\ n\geq N\ \&\ |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon)$

۲) $\exists\varepsilon\ \forall N\ \exists n\ \exists x(x\in X\ \&\ n\geq N\ \&\ |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon)$

۳) $\exists\varepsilon\ \forall N\ \forall n\ \exists x(x\in X\ \&\ n\geq N\ \&\ |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon)$

۴) $\exists\varepsilon\exists N\ \exists n\ \forall x(x\in X\ \&\ n\geq N\Rightarrow|f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon)$

۸- فرض کنید تابع $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & x=\frac{m}{n},\ y=\frac{p}{n},\ (m,n)=1,(p,n)=1\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

تعریف شده باشد. کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $\iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy=1$

۲) $\iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy=0$

۳) $\int_0^1\left[\int_0^1 f(x,y)dy\right]dx=0$

۴) $\int_0^1\left[\int_0^1 f(x,y)dy\right]dx=1$

۹- فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر ریمان بر بازهٔ $[a,b]$ باشد و دنبالهٔ توابع $\{F_n\}$ بر $[a,b]$ با ضابطه $F_n(x)=\int_a^x f_n(t)dt$ تعریف شود. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر دنبالهٔ $\{f_n\}$ یکنواخت همگرا به صفر باشد آنگاه $\{F_n\}$ هم یکنواخت همگرا به صفر است

۲) اگر دنبالهٔ $\{f_n\}$ یکنواخت کران‌دار باشد آنگاه $\{F_n\}$ یک زیر دنباله یکنواخت همگرا دارد.

۳) اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته و یکنواخت همگرا باشد، آنگاه دنبالهٔ $\{F_n\}$ یکنواخت همگرا به تابعی است که لزوماً به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر نیست.

۴) اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای نزولی از توابع پیوسته و نقطه‌وار همگرا به صفر باشد، آنگاه دنباله $\{F_n\}$ یکنواخت همگرا به صفر است.

۱۰- فرض کنید A یک ماتریس ۳×۳ وارون‌پذیر با درایه‌های واقع در میدان F باشد. اگر $\det(A)=1$ و $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(A^{-1})=0$، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $A^5=I$

۲) $A^2=I$

۳) $A^3=I$

۴) $A^4=I$

۱۱- اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و مقادیر ویژه آن یک تصاعد حسابی با قدر نسبت مثبت تشکیل دهند به فرض اینکه $\operatorname{tr}(A)=9$ و $\det(A)=-21$، آنگاه بزرگترین مقدار ویژه عبارت است از:

۱) ۴

۲) ۷

۳) ۸

۴) ۹

۱۲- فرض کنید A یک ماتریس ۴×۴ با درآیه‌های حقیقی باشد به‌طوری که $A^2+2A+3I=0$، در این صورت $\operatorname{tr}(A^{-1})$ برابر است با:

۱) $\frac{2}{3}$

۲) $\frac{-2}{3}$

۳) $\frac{4}{3}$

۴) $\frac{-4}{3}$

۱۳- فرض کنید $A_1,A_2,\dots,A_{20}\in M_{10}(\mathbb{R})$ ماتریس‌های ناصفر بوده و $A_1A_2\dots A_{20}=0$، در این صورت حداکثر مقدار $\sum_{i=1}^{20}\operatorname{rank}(A_i)$ برابر کدام یک است؟

۱) ۵۰

۲) ۱۰۰

۳) ۱۹۰

۴) ۱۹۹

۱۴- اگر x ماتریسی $n\times 1$ روی میدان F باشد آنگاه $\det(I_n+xx^t)$ برابر است با:

۱) $1+x^tx$

۲) $1-x^tx$

۳) $(1+x^tx)^2$

۴) $(1-x^tx)^2$

۱۵- فرض کنید A ماتریسی ۲×۲ است به‌طوری که $tr(A)=\frac{۱}{۲}det(A)$، در این صورت کدام یک از مقادیر زیر نمی‌تواند مقدار ویژه A باشد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۱-
۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۶- اگر $A\in M_{۱۰}(\mathbb{R})$ و $B\in M_{۱۲}(\mathbb{R})$ و $det(A)=۲$ و $det(B)=۳$، در این صورت $det(A\otimes B)$ برابر است با: (اگر $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ در این صورت $A\otimes B=(a_{ij}B)$)

۱) $۲^{۱۲}۳^{۱۰}$
۲) $۲^{۱۰}۳^{۱۲}$
۳) $۶^{۱۰}$
۴) $۱۲^{۱۰}$

۱۷- فرض کنید G یک گروه ساده از مرتبه ۱۶۸ باشد. در این‌صورت تعداد عناصر از مرتبه ۷ در گروه G برابر است با:

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۲۴
۴) ۴۸

۱۸- فرض کنید G گروه ماتریس‌های ۲×۲ با دترمینان ۱ و با درایه‌های حقیقی است. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) G گروهی ساده است.
۲) مرکز گروه G بدیهی است.
۳) G بیش از یک زیرگروه از مرتبه ۲ دارد.
۴) G دارای نامتناهی عضو مرتبه متناهی است.

۱۹- فرض کنید G گروهی متناهی است که برای هر زیرگروه دوری مانند H از G داریم $\frac{N_G(H)}{C_G(H)}\simeq Aut(H)$ در این صورت :

۱) اگر عدد اول p مرتبه گروه را عاد کند آنگاه $p(p-۱)\,\big|\,|G|$
۲) هر زیرگروه دوری در G نرمال است.
۳) G گروهی آبلی است.
۴) G گروهی از مرتبه فرد است.

۲۰- چندجمله‌ای $f(x) = 3 + 2x + 4x^2 \in \mathbb{Z}_8[x]$:

۱) خود توان است.
۲) مقسوم علیه صفر است.
۳) وارون‌پذیر است.
۴) پوچ توان است.

۲۱- کدام گزینه در مورد حلقهٔ $\frac{\mathbb{Z}[x]}{(2x-1)}$ درست است؟

۱) با حلقهٔ $\left\{f(\frac{1}{2}) \middle| f(x) \in \mathbb{Z}[x]\right\}$ یکریخت است.
۲) با حلقهٔ $\mathbb{Z}_2$ یکریخت است.
۳) با حلقهٔ $\mathbb{Z}$ یکریخت است.
۴) میدان است.

در تمامی سؤال‌های زیر حلقه‌ها یکدار و مدول‌ها یکانی می‌باشند.

۲۲- فرض کنید F یک گروه آزاد غیر آبلی باشد. در این صورت:

۱) عنصری غیر بدیهی در F با مرتبه متناهی وجود دارد.
۲) عنصری غیر بدیهی در F وجود دارد که مرکز ساز آن غیر دوری است.
۳) عنصری غیر بدیهی در F وجود دارد که مرکزساز آن غیر آبلی است.
۴) $C_F(a)$ که $a \neq 1$ و $a \in F$، گروهی دوری است.

۲۳- گروه $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ با کدام گروه یکریخت است؟

۱) $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$
۲) $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$
۳) $\mathbb{R}$
۴) $\mathbb{Q}$

۲۴- فرض کنید که $\varphi : M \to F$ یک R – همریختی پوشا باشد که در آن F آزاد است. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) M پروژکتیو (تصویری) است اگر و تنها اگر $\ker\varphi$ پروژکتیو باشد.
۲) اگر $\ker\varphi$ پروژکتیو باشد آنگاه M پروژکتیو است ولی برعکس درست نیست.
۳) اگر M پروژکتیو باشد آنگاه $\ker\varphi$ پروژکتیو است ولی برعکس درست نیست.
۴) هیچ ارتباطی بین پروژکتیو بودن M و $\ker\varphi$ وجود ندارد.

۲۵- فرض کنید F یک میدان بوده و $R = M_{۲}(F)$. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) یک مدول روی R وجود دارد که نه تصویری است و نه تزریقی (انژکتیو)

۲) هر مدول روی R هم تزریقی (انژکتیو) است و هم تصویری است.

۳) یک مدول روی R وجود دارد بطوری که تصویری است ولی تزریقی (انژکتیو) نیست.

۴) یک مدول روی R وجود دارد بطوری که تزریقی (انژکتیو) است ولی تصویری نیست.

۲۶- تعداد حلقه‌های ۸ عضوی، که عضو پوچ توان ناصفر ندارند، برابر است با:

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

۲۷- کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}$ به عنوان $\mathbb{Z}$- مدول تصویری است.

۲) $\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}$ به عنوان $\mathbb{Z}$- مدول انژکتیو است.

۳) فرض کنید $\phi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ، $\phi(x)=۲x$، در این صورت $۱\otimes\phi:\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\to\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ یک به یک است.

۴) فرض کنید $\phi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ، $\phi(x)=۲x$، در این صورت $۱\otimes\phi:\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\to\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ پوشا است.

۲۸- فرض کنید $R=\mathbb{Z}_{۸}\times\mathbb{Z}$ و M یک R- مدول با تولید متناهی است و $I=\{(a,۰)\mid a\in\{۰,۲,۴,۶\}\}$. چنانچه $f:M\to N$ یک R- مدول همریختی و $\bar{f}:\frac{M}{IM}\to\frac{N}{IN}$ با ضابطه $\bar{f}(m+IM)=f(m)+IN$ داریم:

۱) اگر $\bar{f}$ یک به یک باشد آنگاه f نیز یک به یک است.

۲) اگر $\bar{f}$ یکریختی باشد آنگاه f نیز چنین است.

۳) اگر $\bar{f}$ پوشا باشد آنگاه f نیز پوشاست.

۴) $\bar{f}$ خوش تعریف نمی‌باشد.

۲۹- فرض کنید همریختی مدولی $f:M\to N$ دارای این خاصیت است: به ازای هر R - همریختی $g:N\to M$ داریم $fogof=f$. که در آن M و N، R - مدول هستند. در این صورت:

۱) $\ker f$ یک جمعوند مستقیم M است.

۲) $\ker f\simeq M$

۳) M و N یکریخت نمی‌باشند.

۴) $M\simeq N$

۳۰- فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار است با این خاصیت که هر R – مدول آزاد M تمام زیر مدولهایش نیز آزادند. در این صورت کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

۱) هر R – مدول انژکتیو (تزریقی) است.

۲) R یک حوزه ایده‌آل اصلی است.

۳) هر R – مدول تصویری است.

۴) R یک میدان است.

۳۱- فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی ویکدار باشد به طوری که هر ایده‌آل ماکسیمال آن به صورت (e) است که $e^2 = e$. کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

۱) اگر $a \notin \{0,1\}$ و a خودتوان باشد آنگاه (a) ایده‌آل ماکسیمال است.

۲) $R \simeq R_1 \times R_2$ که R_1 و R_2 حلقه هستند.

۳) خودتوانی مانند a وجود دارد که $\frac{R}{\text{Ann}(a)}$ میدان است.

۴) خودتوانی مانند a وجود دارد که $\frac{R}{\text{Ann}(1-a)}$ میدان است.

۳۲- فرض کنید M یک R – مدول باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) R – مدول N و R – مدول تصویری P وجود دارد که $M \simeq \frac{N}{P}$.

۲) R – مدول N و R – مدول تصویری P وجود دارد که $M \simeq \frac{P}{N}$.

۳) R – مدول N و R – مدول انژکتیو I وجود دارد که $M \simeq \frac{I}{N}$.

۴) R – مدول N و R – مدول انژکتیو I وجود دارد که $M \simeq \frac{N}{I}$.

۳۳- کدام گزینه در مورد $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p^i})$ صحیح است؟

۱) با $\mathbb{Q} \times G$ یکریخت است که G یک گروه دوری است.

۲) $\mathbb{Z}$– مدولی یک عضوی است.

۳) ناصفر است.

۴) با $\prod_{i=1}^{\infty} (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^i})$ یکریخت است.

۳۴- کدام گزینه برای هر مجموعه اندازه‌پذیر $E \subseteq [0,1]$ درست است؟ (m اندازه لبگ است و E° و $\bar{E}$ به ترتیب درون و بستار E هستند.)

۱) اگر $m(E) > 0$ آنگاه $(\bar{E})^\circ \neq \varnothing$.

۲) اگر $m(E) = 1$ آنگاه $\bar{E} = [0,1]$.

۳) اگر $m(E) = 1$ آنگاه $E^\circ \neq \varnothing$.

۴) اگر $m(E) = 0$ آنگاه E نقطهٔ حدی ندارد.

۳۵- اگر μ اندازه مثبت روی σ ـ جبر $\mathcal{M}$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشد و $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ، آنگاه $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

۲) اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر دو بدو مجزا باشد و $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$، آنگاه $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

۳) اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای تودرتو و صعودی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشد و $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ، آنگاه $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

۴) اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای تودرتو و نزولی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشد و $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ، آنگاه $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

۳۶- اگر $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه و f و g توابعی حقیقی بر X باشند، کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $|f|$ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه f اندازه‌پذیر است.

۲) اگر f^n برای هر $n > 4$ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه f اندازه‌پذیر است.

۳) اگر $f + g$ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه $f - g$ اندازه‌پذیر است.

۴) اگر fg اندازه‌پذیر باشد، و g در هیچ نقطه‌ای صفر نشود، $\frac{f}{g}$ اندازه‌پذیر است.

۳۷- کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $E \subseteq \mathbb{R}$ و برای هر $x \in \mathbb{Q}$ و هر $n \in \mathbb{N}$ ، $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap E$ اندازه‌پذیر لبگ باشد، آنگاه E اندازه‌پذیر لبگ است.

۲) اگر $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ خانواده‌ای از توابع اندازه‌پذیر لبگ باشد آنگاه $\sup_\alpha f_\alpha$ اندازه‌پذیر است.

۳) اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تنها در دو نقطه ناپیوسته باشد، آنگاه f با تابعی پیوسته بر $\mathbb{R}$ تقریباً همه‌جا برابر است.

۴) خانواده‌ای ناشمارا از زیر مجموعه های اندازه‌پذیر لبگ با اندازه لبگ ناصفر دو بدو مجزا وجود دارد.

۳۸- کدام یک از گزینه‌های زیر به ازای هر تابع نامنفی و انتگرال‌پذیر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و هر $\alpha>0$ برقرار است؟ (m اندازه لبگ است و $E=\{x:f(x)>\alpha\}$)

۱) $m(E)\geq\int_{\mathbb{R}} fdm$

۲) $m(E)\leq\alpha\int_{\mathbb{R}} fdm$

۳) $m(E)\leq\frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}} fdm$

۴) $m(E)\leq\int_{\mathbb{R}} fdm$

۳۹- فرض کنیم n عددی طبیعی، $X=\{1,2,\dots,n\}$، μ اندازه شمارشی روی مجموعه توان $P(X)$ و اندازه ν روی $P(X)$ به صورت $(E\subseteq X)$ $\nu(E)=\begin{cases}1 & n\in E\\ 0 & n\notin E\end{cases}$ تعریف شده باشد، اگر تابع $f:X\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$ تعریف شود، مقدار انتگرال $\int_X fd(\mu+\nu)$ کدام است؟

۱) $\frac{n^2+1}{n(n+1)}$

۲) $\frac{n}{n+1}$

۳) $\frac{1}{n(n+1)}$

۴) صفر

۴۰- اگر (X,M,μ) یک فضای اندازه و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر نامنفی روی X و f تابعی انتگرال‌پذیر و نامنفی روی X باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu\geq\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu$.

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n d\mu\geq\int_X(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)d\mu$.

۳) اگر $\{f_n\}$ نزولی باشد و $f_n\to f$ نقطه‌ای روی X آنگاه $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu=\int_X fd\mu$.

۴) اگر $f_n\to f$ به طور یکنواخت روی X آنگاه $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu=\int_X fd\mu$.

۴۱- اگر $f_n(x)=\frac{1-\cos(x^n)}{x^{2n}}$ برای $x>0$، مقدار $\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n dm$ کدام است؟ (m اندازه لبگ است.)

۱) 0

۲) 1

۳) $\frac{1}{2}$

۴) $+\infty$

۴۲- فرض کنیم (X,Σ,μ) یک فضای اندازهٔ متناهی، $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ دنباله‌هایی از توابع اندازه‌پذیر و f و g توابعی اندازه‌پذیر بر X باشند. کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر $f_n \to f$ در اندازه و $g_n \to g$ در اندازه آنگاه $\max\{f_n , g_n\} \to \max\{f , g\}$ در اندازه.

۲) اگر $f_n \to f$ در اندازه و $g_n \to g$ در اندازه آنگاه $f_n g_n \to f g$ در اندازه.

۳) اگر $f_n \to f$ در اندازه آنگاه هر زیر دنباله از $\{f_n\}$ تقریباً همه‌جا به f میل می‌کند.

۴) اگر $f_n \to f$ تقریباً همه‌جا آنگاه $f_n \to f$ در اندازه.

۴۳- اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر لبگ روی $[0,1]$ و f تابعی انتگرال‌پذیر لبگ روی $[0,1]$ باشد، کدام گزینه درست است؟ (m اندازه لبگ است).

۱) اگر $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n - f|\, dm = 0$ آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $f_n - f$ تقریباً همه‌جا کراندار است.

۲) اگر $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n - f|^2\, dm = 0$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n - f|\, dm = 0$.

۳) اگر $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n - f|\, dm = 0$ آنگاه $f_n \to f$ تقریباً همه‌جا.

۴) اگر $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n - f|\, dm = 0$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n - f|^2\, dm = 0$.

۴۴- فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ و $T : X \to Y$ عملگری خطی و کراندار با برد چگال در Y باشد به طوری که برای هر $x \in X$ که $\|x\| = 1$، $\|Tx\| \geq 1$. کدام گزینه درست است؟

۱) T پوشا است ولی یک‌به‌یک نیست.

۲) T یک‌به‌یک است ولی پوشا نیست.

۳) T دوسویی است و $\|T^{-1}\| \geq 1$

۴) T دوسویی است و $\|T^{-1}\| \leq 1$

۴۵- فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و M و N زیر فضاهای H باشند. در این صورت مجموعه $(M \cap N)^{\perp}$:

۱) برابر بستار $M^{\perp} + N^{\perp}$ است، هرگاه M و N بسته باشند.

۲) همواره مشمول در $M^{\perp} + N^{\perp}$ است.

۳) همواره برابر بستار $M^{\perp} + N^{\perp}$ است.

۴) همواره برابر $M^{\perp} + N^{\perp}$ است.