

حل تشریحی سوالات مکانیک محیط های پیوسته-کنکور دکتری مهندسی
مکانیک سنگ ۹۷

هادی حقگوپی

h.haghgouei@gmail.com

حل مسائل معادلات خطی بردار-ماتریس در کتاب 97 هادی حقگوئی
 h.haghgouei@gmail.com

16) تابع تنش آیری $\varphi(u, z) = u(c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3)$ حالت تنش در یک سیراب
 می‌تند. مقادیر تنش‌ها در کدام مرتبه جمع معرّفی شده است؟

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = u c_1 + 2 c_2 u z + 3 c_3 z^2 u \quad \sigma_{zz} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 2 c_2 u + 6 c_3 z u = \sigma_{uz} \quad \sigma_{uz} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial z} = -(c_1 + 2 c_2 z + 3 c_3 z^2)$$

جواب: جمع درجه‌های وجود ندارد / این جمع در باریک‌ترین است.

17) جسم انعطاف پذیر B در داخل یک سیلندر با دیواره صلب در امتداد محور u فشرده می‌شود. اگر فرض کنیم الاستیسیته B برابر E و ν باشد، فیدر ایزامپل صول الاستیسیته حور (E_{eff}) کدام است؟

حورال الاستیسیته موثر در مواد کومپوزیتی مطرح می‌شود و مصداق آن در مابین است می‌تواند مربوط به توده است در ترکیب درز + است بکری و یا ترکیب چندین با خواص مختلف باشند این در حالت است صورت سوال چنین مدلی را مطرح کرده است و با بکری روز حل‌یادی سوال داریم:

$$\sigma_{uz} = \sigma_1 \quad \epsilon_2 = \nu \sigma_1 \quad \sigma_2 = 0$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1) = 0 \Rightarrow \sigma_2 = \nu \sigma_1$$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2) = \epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} (1 - \nu^2) \Rightarrow \sigma_1 = E \left(\frac{\epsilon_1}{1 - \nu^2} \right)$$

نه بر این جواب جمع $\frac{1}{1 - \nu^2}$ یعنی 2 خواهد بود / این سوال ربط به تعاریف مصالح است!

18) با فرض اینکه زرد (دایره‌ها) مقادیر دوبر زیر به ترتیب کدام زوج با هم باشد؟

$$\delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{ki} = \delta_{ik} \delta_{ki} = \delta_{ii} = \delta_{kk} = 3$$

$$\delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{ki} = \delta_{ik} \delta_{ki} = \delta_{ii} = \delta_{kk} = 3$$

جواب: جمع 4

19) تانژنسیل درشت صاف با آن در یک نقطه از جسم داده شده است. اگر نسبت به اصل
 0.25 باشد، ضریب ارجاعی این عمل چندین بار با شکل است؟

$$\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{33}) + (\sigma_{11} + \sigma_{33}) + (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$= \frac{1}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) (1 - 2\nu) \Rightarrow \bar{\epsilon}_{KK} = \frac{(3P)(1 - 2\nu)}{E}$$

$$P_0 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = -12$$

$$\bar{\epsilon}_{KK} = 0.001 + 0.003 + 0.002 = 0.006$$

$$\frac{3 \times (0.5)}{E} \times (-12) = 0.006 \Rightarrow E = -3 \text{ GPa} \quad \text{در نتیجه ها صبر کنید!}$$

دلیل منفی بودن E این است که تنش منفرجه موجب کرنش مثبت شده است!
 در واقع باید تا سوراخ کردن را هم منفی در نظر بگیریم و آن صورت E = 3 GPa و $\nu = 0.5$ صحیح می‌برد

20) تعداد بار استرها مستطیل الاستیک یک ماده آیزوتروپیک با یک ماده ایزوتروپیک برابر است
 دقیقاً ~~یکسان~~ سوال به زبان است.

بزرگی یک جسم ناهمگن $\leftarrow 21$
 با مواد ایزوتروپیک $\leftarrow 9$

21) تانژنسیل در یک نقطه صورت زیر است:

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

اگر تنش اصلی حداقل 3 بار با شکل و تنش اصلی حداکثر 2 برابر تنش اصلی بیانی باشد، مقدار تنش
 اصلی حداکثر چندین بار با شکل است؟

$$\sigma_1 = 4 + 7 + 4 = 15$$

$$\sigma_3 = 3, \quad \sigma_1 = 2\sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 15 \Rightarrow \sigma_2 = 4 \Rightarrow \sigma_1 = 8$$

22) وضعیت تنش سه بزرگی در یک نقطه از جسم به صورت زیر است. اگر نسبت به اصل این
 تعداد تنش به ازای مقدار متناهی α وجود دارد یا نه؟
 عددی که تعداد در غاب نیروهای جسمی؟

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 2\alpha + 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3\alpha \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx, \alpha} + \tau_{xy, \gamma} + \tau_{xz, z} = 0 \Rightarrow 2 + \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$$

$$\tau_{yx, \alpha} + \sigma_{yy, \gamma} + \tau_{yz, z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial x} - 1 = 0$$

$$\tau_{zx, \alpha} + \tau_{zy, \gamma} + \sigma_{zz, z} = 0 \Rightarrow 0$$

$$2 + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -2 \Rightarrow \alpha = -2y + f(u, z) \quad (*)$$

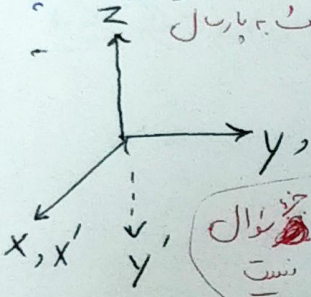
$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{\partial f(u, z)}{\partial u} = 1 \Rightarrow f(u, z) = u + g(z) \quad (**)$$

$$(*), (***) \Rightarrow \alpha = -2y + u + g(z)$$

جواب اول در زمینه‌ها نسبت اوری با فرض $g(z) = 0$ است
این سوال مربوط به جانی الاستیسیته است.

(23) بردار نیروی $F = 1j - 5k$ در یک سیستم مختصات داده شده است. اگر سیستم مختصات حول محور x با اندازه 50 در یک مسافت در دوران کند، بردار نیروی F در سیستم مختصات جدید کدام است؟

ثابت پارامتر -



$$Q = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ & 0 \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ -50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 100 \end{bmatrix}$$

دفعه اول شکل سوال نسبت

$$\vec{F} = 50j + 100k \quad 3 \checkmark$$

(24) در مورد توابع بلترامی مسئله، کدام گزینه صحیح است؟

= سوال ثابت پارامتر - مربوط به جانی الاستیسیته است

بلترامی میل:

$$F_{zz} - F_{zz} - F_{zz} = \frac{v}{1-v} \epsilon_{zz} + \frac{1}{1+v} \epsilon_{zz} + \epsilon_{zz}$$

همانگونه که ملاختم می‌شود این روابط بر حسب تنش هستند (روابطی که در تنش بر حسب مؤلفه‌های تنش) و با باز کردن آن‌ها که رابطه حاصل می‌شود نه بر این است. 3

(25) تشریح کنید در یک نقطه از محیط یک پیرامید مخروطی که در این نقطه یک استوانه است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 2 \\ 1.5 & -1.5 & -0.5 \\ 2 & -0.5 & 3.5 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\frac{I_1}{3} = p = \frac{1 - 1.5 + 3.5}{3} = 1$$

تنسور تنش - تنسور عمل:

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 1.5 & 2 \\ 1.5 & -1.5-1 & -0.5 \\ 2 & -0.5 & 3.5-1 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.5 & 2 \\ 1.5 & -2.5 & -0.5 \\ 2 & -0.5 & 2.5 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \quad 4 \checkmark$$

(26) در مورد معادلات سازگاری کدام روش درست است؟

به طور کلی ما شش معادله داریم که از سه مولفه تغییر مکان بدست آمده است. بنابراین حل کلی معادلات کرنش و انحراف سیری از آن ها لزوماً منجر به تغییر مکان های مولفه فرد نخواهد شد. یعنی چندین تغییر مکان مختلف می توانند چنین کرنشی ایجاد کنند و برای یافتن میدان دافکتی تغییر مکان که منجر به کرنش حال حاضر شده با بر روابط سازگاری را می توانیم. روابط سازگاری علاوه بر ارائه تغییر مکان های تک معادله ای شرط بدستش تغییر مکان ها را نیز تعیین می کند.

توجه کنید

این کوان پروپ بر مبنای الاستیسیته است.

(27) حرکت ذره ای ماده ای با معادله های زیر بیان شده است:

$$a_1 = X_1(1+t), \quad a_2 = X_2(1+t)^2, \quad a_3 = X_3(1+t^2)$$

معادله های سرعت در دستگاه مختصات لاکرانژی و اولیری کدام است؟

توجه کنید: سرعت در مختصات لاکرانژی

$$V_1 = X_1, \quad V_2 = 2X_2(1+t), \quad V_3 = 2tX_3$$

توجه کنید: در مختصات اولیری

$$X_1 = \frac{a_1}{1+t} \Rightarrow V_1 = \frac{a_1}{1+t}$$

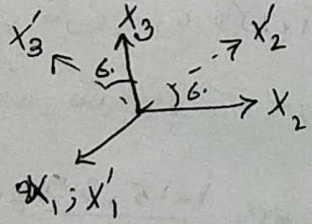
$$X_2 = \frac{a_2}{(1+t)^2} \Rightarrow V_2 = 2 \left(\frac{a_2}{(1+t)^2} (1+t) \right) = \frac{2a_2}{1+t}$$

$$X_3 = \frac{a_3}{1+t^2} \Rightarrow V_3 = 2t \left(\frac{a_3}{1+t^2} \right)$$

توجه کنید

(28) ماتریس تبدیل حاصل از دوران که در هم با یک محور حول محور a_1 در رابطه a_1, a_2, a_3 صورت می گیرد

مسئله جزو سوال نیست



$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

توجه کنید

29) بردار تغییرات \vec{u} به سمت زیر (در جهت \vec{k})

$$\vec{u} = [(3u^2z + 60u)\vec{i} + (5z^2 + 20uy)\vec{j} + (6z^2 + 2uyz)\vec{k}] \times 10^{-3} \text{ mm}$$

تانسور تنش در نقطه $(3, 4, 0.5)$ کلم است

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$e_{11} = 6uz + 60 \Big|_{\rho} = 6(3)(\frac{1}{2}) = 69 \times 10^{-3} = 69 \times 10^{-2}$$

$$e_{12} = 10y \Big|_{\rho} = 4 \times 10^{-2}$$

به بی بقی مولفه های زیر است و جواب $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ - \end{matrix} \right\}$

30) اگر $A_{ij} = \delta_{ij} B_{kk} + B_{ij}$ و B_{ij} تانسور مرتبه 2 در δ_{ij} مرتبه است

B_{kk} کلم است

$$A_{11} = B_{kk} + 3B_{11}$$

$$A_{22} = B_{kk} + 3B_{22}$$

$$A_{33} = B_{kk} + 3B_{33}$$

در نقطه ρ B_{kk} وجود ندارد

$$\Rightarrow A_{11} + A_{22} + A_{33} = 3B_{kk} + 3(B_{11} + B_{22} + B_{33})$$

$$A_{kk} = 6B_{kk} \Rightarrow B_{kk} = \frac{1}{6} A_{kk}$$

$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ - \end{matrix} \right\}$