



کد کنترل

273

F

آزمون (نیمه متمرکز) ورود به دوره های دکتری - سال ۱۴۰۱

دفترچه شماره (۱)

صبح جمعه ۱۴۰۰/۱۲/۶



«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.»

امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

رشته ریاضی (کد ۲۲۳۳)

* تذکر مهم: دقت لازم در پاسخ به مواد امتحانی، رشته و زمینه های مورد نظر به عمل آید.

مدت پاسخ گویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۷۵

عنوان مواد امتحانی

دروس کارشناسی ارشد				دروس کارشناسی							زمینه	گرایش	رشته
اصول آموزش ریاضی	پهتسلای خطی پیشرفته ۱	جبر پیشرفته ۱	آنالیز حقیقی ۱	مبانی احتمال	مبانی توپولوژی	مبانی جبر	مبانی آنالیز عددی	مبانی آنالیز ریاضی	مبانی ماتریس ها و جبر خطی	مبانی علوم ریاضی			
-	-	✓	✓	-	✓	✓	-	✓	✓	✓	محض	-	ریاضی
-	✓	-	✓	✓	-	-	✓	✓	✓	✓	کاربردی	-	آموزش ریاضی
✓	-	-	✓	✓	-	-	✓	✓	✓	✓	-	-	آموزش ریاضی

- ستفاضیان رشته ریاضی، زمینه محض می بایستی به دروس (مبانی علوم ریاضی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی جبر، توپولوژی، آنالیز حقیقی ۱ و جبر پیشرفته ۱) پاسخ دهند.
- متقاضیان رشته ریاضی، زمینه کاربردی می بایستی به دروس (مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی، مبانی احتمال، آنالیز حقیقی ۱ و بهینه سازی خطی ۱) پاسخ دهند.
- متقاضیان رشته ریاضی، زمینه آموزش ریاضی می بایستی به دروس (مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی، مبانی احتمال، آنالیز حقیقی ۱ و اصول آموزش ریاضی) پاسخ دهند.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤال ها به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می باشد و با متخلفان برابر مقررات رفتار می شود.

* متقاضی گرامی، وارد نکردن مشخصات و امضا در کادر زیر، به منزله غیبت و حضور نداشتن در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود را با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخ‌نامه و دفترچه سؤال‌ها، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچه سؤال‌ها و پایین پاسخ‌نامه‌ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

مبانی علوم ریاضی:

- ۱- نقیض گزاره زیر کدام است؟ (فرض می‌کنیم متغیرها مقید به اعداد حقیقی باشند).
اگر هر عدد بزرگتر از b از a ناکمتر باشد، آن‌گاه $a \leq b$.

$$(1) \forall x (x > b \wedge x \geq a) \wedge a > b$$

$$(2) \forall x (x > b \Rightarrow x \geq a) \wedge a > b$$

$$(3) \exists x (x > b \wedge x < a) \Rightarrow a > b$$

$$(4) \forall x (x > b \Rightarrow x \geq a) \Rightarrow a > b$$

- ۲- فرض کنید $(X, \leq)$ یک مجموعه جزئاً مرتب باشد که کلاً مرتب هم هست، یعنی اعضای آن قابل قیاس هستند. به ازای هر $x, y \in X$ ، بازه (x, y) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x, y) = \{z \in X : x \leq z \wedge z \leq y \wedge x \neq z \neq y\}$$

رابطه $\sim$ با تعریف زیر کدام خاصیت را دارد؟

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists x \exists y (x, y \in X \wedge a, b \in (x, y))$$

(۱) متعددی است.

(۲) پادمتقارن است.

(۳) انعکاسی (بازتابی) است.

(۴) در اصل تثلیث صدق می‌کند.

- ۳- فرض کنید $A = \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m} : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$ ، کدام گزینه درست است؟

$$(1) \min A = -1$$

$$(2) \inf A = -1$$

$$(3) \sup A = \max A = 1$$

(۴) A هم بیشینه (ماکسیمم) و هم کمینه (مینیمم) دارد.

- ۴- تابع $f: X \rightarrow Y$ مفروض است. خاصیت $\forall A (A \subseteq X \Rightarrow f(A^c) = f(A)^c)$ را به p و دوسویی بودن f را به q نمایش می‌دهیم. کدام گزینه درست است؟

(۱) p نه شرط لازم برای q است و نه شرط کافی.

(۲) p شرط کافی برای q است ولی لازم نیست.

(۳) p شرط لازم برای q است ولی کافی نیست.

(۴) شرط لازم و کافی برای p آنست که q .

۵- کدام گزینه معادل اصل انتخاب نیست؟

- (۱) هر مجموعه جزئاً مرتب یک زنجیر ماکسیمال (بیشین) دارد.
- (۲) اگر α, β دو عدد اصلی باشند، آن‌گاه $\alpha \leq \beta$ یا $\beta \leq \alpha$.
- (۳) حاصل ضرب دکارتی، هر تعداد نامتناهی از مجموعه‌های ناتهی خود ناتهی است.
- (۴) اگر $\{A_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد، تابعی مانند $f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $f(i) \in A_i, i \in I$.

مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی:

۶- فرض کنید W, U زیر فضا‌های متمایز ۴ بعدی از یک فضای برداری V باشند، به‌طوری‌که $\dim V = 6$. ابعاد ممکن برای $U \cap V$ کدام است؟

- (۱) ۱ یا ۲
- (۲) ۲ یا ۳
- (۳) ۳ یا ۴
- (۴) ۴

۷- چندجمله‌ای مینیمال (کمین) $m(x)$ از ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ ، کدام است؟

- (۱) $(x-1)(x-3)$
- (۲) $(x-1)(x+2)$
- (۳) $(x-3)(x+3)$
- (۴) $(x-1)(x-3)^2$

۸- فرض کنید $V = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) \mid a_i \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n\}$. می‌دانیم که V یک $\mathbb{R}$ -فضای برداری است. حال تبدیل خطی $T: V \rightarrow V$ با ضابطه $T((a_1, a_2, a_3, \dots)) = (a_2, a_3, a_4, \dots)$ را در نظر بگیرید. مقادیر ویژه T در کدام گزینه است؟

- (۱) $3, -1$
- (۲) $3, -2$
- (۳) $2, -3$
- (۴) $-3, 1$

۹- فرض کنید V یک فضای برداری و $T: V \rightarrow V$ یک تبدیل خطی باشد. در این صورت $T(\ker T^2)$ برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) $\ker T^2 \cap \text{Im } T^2$
- (۲) $\ker T \cap \text{Im } T^2$
- (۳) $\ker T \cap \text{Im } T$
- (۴) $\ker T^2 \cap \text{Im } T$

۱۰- فرض کنید V فضای برداری چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه ۱۴۰۰ با ضرایب حقیقی، روی میدان اعداد حقیقی باشد و $T: V \rightarrow V$ یک تبدیل خطی با ضابطه $T(P(x)) = P(x) - P(-x)$ باشد. در این صورت $\text{rank}(T)$ (رتبه T) برابر با کدام گزینه است؟

(۱) ۱۴۰۱

(۲) ۷۰۱

(۳) ۱۴۰۰

(۴) ۷۰۰

مبانی آنالیز ریاضی:

۱۱- فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله بازگشتی باشد به‌طوری‌که $x_0 = 1$ و به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)x_{n-1}$.

در این صورت دنباله $\{x_n\}$:

(۲) نزولی و کراندار است و لذا همگرا است.

(۱) بی‌کران است و لذا واگرا است.

(۴) صعودی و کراندار است و لذا همگرا است.

(۳) کوشی نیست و لذا واگرا است.

۱۲- کدام گزینه درباره سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{1+n^2})$ درست است؟

(۱) همگرای مطلق است.

(۲) همگرای مشروط است.

(۳) واگرا به بی‌نهایت است.

(۴) دنباله مجموع جزئی آن کراندار است ولی سری واگرا است.

۱۳- فرض کنید A زیرمجموعه‌ای نامتناهی و سره از $\mathbb{R}$ باشد و A° و ∂A به‌ترتیب مجموعه نقاط درونی و مرزی A باشند. کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر $A^\circ = \emptyset$ ، آنگاه $A^\circ = \emptyset$.

(۲) اگر ∂A نامتناهی باشد، آنگاه $A^\circ = \emptyset$.

(۳) اگر ∂A نامتناهی باشد، آنگاه $(\partial A)^\circ \neq \emptyset$.

(۴) اگر A باز و در $\mathbb{R}$ چگال باشد، آنگاه ∂A متناهی است.

۱۴- فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ در شرط $f(x+y) = f(x) + f(y)$ صدق کند. کدام گزینه معادل پیوستگی f بر $\mathbb{R}$ نیست؟

(۱) f یکنوا است.

(۲) f بر هر بازه بسته و کراندار انتگرال‌پذیر ریمان است.

(۳) $f|_{\mathbb{Q}^\circ}$ (تحدید f به مجموعه اعداد گنگ)، پیوسته است.

(۴) $f|_{\mathbb{Q}}$ (تحدید f به مجموعه اعداد گویا)، پیوسته است.

۱۵- فرض کنید تابع حقیقی f بر بازه (a, b) مشتق پذیر باشد. کدام گزینه درست است؟

- (۱) اگر f' بر (a, b) پیوسته باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ موجود است.
- (۲) اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ موجود باشد، آنگاه f' بر (a, b) کراندار است.
- (۳) اگر f' بر (a, b) کراندار باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ موجود است.
- (۴) اگر f بر (a, b) کراندار باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ موجود است.

مبانی آنالیز عددی:

۱۶- در یک دستگاه غیرشمار برای نمایش اعداد حقیقی در مبنای ۷ با ۳ رقم مانیتس و روش گرد کردن، فاصله بین عدد ۹ و نزدیکترین عدد قابل نمایش بزرگ از ۹ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{7}$
- (۲) ۷
- (۳) ۱
- (۴) 7^{-3}

۱۷- λ^* جواب مسأله کمترین مربعات $\min_{\lambda} \|\lambda u - b\|_2$ که در آن، $u, b \in \mathbb{R}^n$ بردارهای ناصفر متعامد بر هم هستند

برابر است با

- (۱) صفر
 - (۲) یک عدد منفی
 - (۳) یک عدد مثبت
 - (۴) صفر یا یک عدد منفی یا یک عدد مثبت
- ۱۸- $L_i(x)$ را تابع پایه ای لاگرانژ مربوط به نقاط متمایز (x_i, f_i) ، $i = 1, \dots, n+1$ ، $n \geq 1$ در نظر بگیرید. مقدار

$$\sum_{i=1}^{n+1} L_i(x)$$

- (۱) برابر است با صفر
- (۲) ممکن است مثبت باشد.
- (۳) ممکن است منفی باشد.
- (۴) برابر است با یک

۱۹- تقریب تابع لگاریتم طبیعی به صورت $f(x) = L_n x$ در بازه $[1, 2]$ با تکه های خطی درون یاب مدنظر است. این بازه دست کم به چند تکه مساوی تقسیم شود تا کران بالای خطای درون یابی برای تخمین f در سرتاسر بازه بیش از

$$10^{-4} \times \frac{1}{2} \text{ نباشد؟}$$

- (۱) ۲۵
- (۲) ۵۰
- (۳) ۷۵
- (۴) ۱۰۰

۲۰- فرض کنید $Q(x) = x^T A^T A x + 2x^T A^T b$ و A ستون های مستقل خطی دارد. جواب برای $\min_x Q(x)$

- (۱) لزوماً یکتا نیست.
(۲) ممکن است موجود نباشد.
(۳) جواب مسئله $\min_x \|Ax + b\|_2$ است.
(۴) ممکن است جواب سراسری نباشد.

مبانی جبر:

۲۱- یادآوری می کنیم که حلقه R را ساده گوئیم، هرگاه ایده آل نابديهی نداشته باشد، و آن را اول گوئیم، هرگاه به ازای هر دو ایده آل ناصفر I و J از آن، ایده آل IJ نیز ناصفر باشد. فرض کنید $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد. در مورد

حلقه های $R = M_n(\mathbb{Z})$ و $S = \frac{M_n(\mathbb{Z})}{M_n(\Delta\mathbb{Z})}$ چه می توان گفت؟

- (۱) S ساده و R اول است.
(۲) S و R هر دو ساده هستند.
(۳) R ساده و S اول است.
(۴) R و S ساده نیستند.
۲۲- تعداد یکریختی های حلقه ای مانند $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ که هر عدد حقیقی را ثابت نگه می دارند، برابر با کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۴

(۴) بی نهایت

۲۳- فرض کنید $R = \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$ و $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_7 \right\}$. در این صورت کدام گزینه درست است؟

(۱) S و R به عنوان حلقه یکریختند ولی به عنوان گروه جمعی یکریخت نیستند.

(۲) S و R هم به عنوان گروه های جمعی و هم به عنوان حلقه، یکریختند.

(۳) S و R نه به عنوان گروه جمعی یکریختند و نه به عنوان حلقه.

(۴) S و R به عنوان گروه های جمعی یکریختند ولی به عنوان حلقه یکریخت نیستند.

۲۴- فرض کنید G یک گروه و H یک زیرگروه سره آن باشد به طوری که هر عضو خارج H ، از مرتبه ۲ است. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

(۱) H زیرگروه نرمال و آبدلی G است.

(۲) H زیرگروه نرمال G است ولی ممکن است آبدلی نباشد.

(۳) H آبدلی است ولی ممکن است زیرگروه نرمال G نباشد.

(۴) ممکن است H آبدلی نبوده و زیرگروه نرمال G نباشد.

۲۵- فرض کنید G گروهی باشد که هر زیرگروه دو مولدی آن دوری است. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

(۱) G آبدلی است.

(۲) هر زیرگروه G نرمال است.

(۳) هر زیرگروه سره G دوری است.

(۴) هر عضو G از مرتبه متناهی است یا در غیراین صورت هر عضو غیربديهی G از مرتبه نامتناهی است.

توپولوژی:

۲۶- فرض کنید τ_1 و τ_2 دو توپولوژی روی مجموعه X باشند به طوری که $\tau_1 \subseteq \tau_2$. در چه صورت $\tau_1 = \tau_2$ ؟

(۱) هر دنباله τ_2 - همگرا، τ_1 - همگرا نیز باشد.

(۲) (X, τ_1) هاوسدورف و (X, τ_2) فشرده باشد.

(۳) هر مجموعه τ_2 - فشرده، τ_1 - فشرده نیز باشد.

(۴) (X, τ_1) فشرده و (X, τ_2) هاوسدورف باشد.

۲۷- فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک هاوسدورف باشند و X موضعاً فشرده باشد. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) هر زیر مجموعه باز X با توپولوژی نسبی موضعاً فشرده است.

(۲) هر زیر مجموعه بسته X با توپولوژی نسبی موضعاً فشرده است.

(۳) اگر تابع $f: X \rightarrow Y$ پیوسته باشد، آنگاه $f(X)$ با توپولوژی نسبی موضعاً فشرده است.

(۴) اگر Y با زیرمجموعه ای باز از یک فضای هاوسدورف فشرده همسان ریخت باشد، آنگاه Y موضعاً فشرده است.

۲۸- فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک همبند با بیش از یک نقطه باشد. ضعیف ترین شرط روی X که ناشمارا بودن آن را ایجاب می کند، کدام است؟

(۱) منظم

(۲) نرمال

(۳) هاوسدورف

(۴) متریک پذیری

۲۹- فرض کنید τ توپولوژی اقلیدسی بر $[0, 1]$ است و $X = [0, 1] \cup \mathbb{N}$. توپولوژی زیر را بر X در نظر بگیرید:

$$\tau^* = \tau \cup \{[0, 1] \cup A : A \subseteq \mathbb{N}\}$$

در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

(۱) τ^* هاوسدورف است.

(۲) τ معادل با توپولوژی نسبی τ^* بر $[0, 1]$ است.

(۳) $[0, 1]$ زیرمجموعه فشرده (X, τ^*) است.

(۴) $[0, 1]$ در (X, τ^*) چگال است.

۳۰- فرض کنید (X, τ_X) و (Y, τ_Y) فضاهای توپولوژیک هستند و $f: X \rightarrow Y$ یک تابع پوشاست به طوری که برای

هر $V \subseteq Y$ ، $f^{-1}(V)$ باز است اگر و تنها اگر V باز باشد. کدام گزینه درست است؟

(۱) τ_X ضعیف ترین توپولوژی روی X است که f نسبت به آن پیوسته است.

(۲) τ_X قوی ترین توپولوژی روی X است که f نسبت به آن پیوسته است.

(۳) τ_Y ضعیف ترین توپولوژی روی Y است که f نسبت به آن پیوسته است.

(۴) τ_Y قوی ترین توپولوژی روی Y است که f نسبت به آن پیوسته است.

مبانی احتمال:

۳۱- اگر A و B دو پیشامد باشند به طوری که $P(A|B') = \frac{1}{2}$ و $P(B|A) = \frac{2}{5}$ ، مقدار $\frac{P(B')}{P(A)}$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{3}{5}$

(۲) $\frac{6}{5}$

(۳) $\frac{5}{6}$

(۴) $\frac{5}{3}$

۳۲- فردی دارای دو سکه است. یکی از سکه ها سالم است، یعنی دارای دو وجه شیر و خط است که احتمال وقوع هر یک از آن ها $\frac{1}{2}$ است. هر دو روی سکه دیگر شیر است. یک سکه به تصادف انتخاب و دوبار پرتاب می شود. اگر نتیجه هر دو پرتاب شیر باشد، احتمال آنکه سکه سالم انتخاب شده باشد چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{5}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{2}{3}$

۳۳- اگر نسبت میانه به مُد (نما) ۲ باشد، نسبت میانگین به مُد تقریباً چند است؟

(۱) $\frac{3}{5}$

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) $\frac{2}{5}$

۳۴- یک جعبه شامل ۱۰۰۰ لامپ روشنایی است. احتمال اینکه حداقل یک لامپ معیوب وجود داشته باشد برابر با ۰٫۱ و احتمال اینکه حداقل دو لامپ معیوب وجود داشته باشد ۰٫۰۵ است. احتمال اینکه حداکثر یک لامپ معیوب در جعبه وجود داشته باشد، کدام است؟

(۱) ۰٫۰۵

(۲) ۰٫۱

(۳) ۰٫۹

(۴) ۰٫۹۵

۳۵- داده های سرعت حرکت ۳۰ پرتابه و داده های وزن ۴۵ بسته پسته یک تولیدکننده در اختیار هستند. اگر بخواهیم میزان پراکندگی این دو مجموعه از داده ها را با هم مقایسه کنیم، کدام آماره (شاخص) زیر برای این منظور مناسب تر است؟

(۲) نیم برد چارکی

(۱) انحراف معیار

(۴) میانگین قدر مطلق انحراف ها

(۳) ضریب تغییرات

آنالیز حقیقی ۱:

۳۶- فرض کنید (X, μ) یک فضای اندازه باشد که $\mu(X) = 1$ و $A_1, A_2, \dots, A_N$ زیرمجموعه های متمایز اندازه پذیر

X باشند به طوری که $\sum_{n=1}^N \mu(A_n) > N-1$. در این صورت کدام گزینه درست است؟

$$(1) \mu\left(\bigcap_{n=1}^N A_n\right) > 0$$

$$(2) \bigcap_{n=1}^N A_n \neq \emptyset \text{ ولی ممکن است } \mu\left(\bigcap_{n=1}^N A_n\right) = 0$$

$$(3) \text{ هر دو مجموعه متمایز } A_m \text{ و } A_n \text{ اشتراک دارند ولی ممکن است } \bigcap_{n=1}^N A_n = \emptyset$$

$$(4) \text{ اشتراک } N-1 \text{ مجموعه از } A_n \text{ ها ناتهی است ولی ممکن است } \bigcap_{n=1}^N A_n = \emptyset$$

۳۷- فضای $\mathbb{R}$ را با اندازه لبگ m و فضای $\mathbb{R}^2$ را با اندازه لبگ m^2 در نظر بگیرید و فرض کنید $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ناتهی باشند. کدام گزینه درست است؟

$$(1) \text{ اگر } m^2(A \times B) = 0 \text{، آنگاه } A \text{ و } B \text{ اندازه پذیر هستند.}$$

$$(2) \text{ اگر همه زیرمجموعه های } A \text{ اندازه پذیر باشند، آنگاه همه زیرمجموعه های } A \times B \text{ هم اندازه پذیر هستند.}$$

$$(3) \text{ اگر } m(A) = 0 \text{ و } A \times B \text{ اندازه پذیر باشد، آنگاه } m(B) < \infty.$$

$$(4) \text{ اگر همه زیرمجموعه های } A \times B \text{ اندازه پذیر باشند، آنگاه همه زیرمجموعه های } A \text{ هم اندازه پذیر هستند.}$$

۳۸- فرض کنید m اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ است و $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ دو تابع باشند به طوری که برای هر $a \in \mathbb{R}$

$$m(\{x: f(x) < a\} \cap \{x: a < g(x)\}) = 0$$

$$(1) \text{ همواره } m(\{x: f(x) < g(x)\}) = 0$$

$$(2) \text{ برای برقراری تساوی } m(\{x: f(x) < g(x)\}) = 0 \text{، ضروری است هر دو تابع } f \text{ و } g \text{ اندازه پذیر باشند.}$$

$$(3) \text{ برای برقراری تساوی } m(\{x: f(x) < g(x)\}) = 0 \text{، ضروری است هر دو تابع } f \text{ و } g \text{ دارای برد شمارا باشند.}$$

$$(4) \text{ برای برقراری تساوی } m(\{x: f(x) < g(x)\}) = 0 \text{، ضروری است هر دو تابع } f \text{ و } g \text{ هم اندازه پذیر و هم دارای برد شمارا باشند.}$$

۳۹- فرض کنید C مجموعه کانتور است و توابع $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه های زیر تعریف شوند.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in C \\ 1 & x \notin C \end{cases}, \quad g(x) = x^2$$

اگر μ یک اندازه بول روی $\mathbb{R}$ باشد که تحت انتقال پایا است و $\int_{[0,1]} g d\mu = 3$ ، آنگاه کدام گزینه درست است؟

$$\int_{[0,1]} f d\mu = 0 \quad (1)$$

$$\int_{[0,1]} f d\mu = 3 \quad (2)$$

$$\int_{[0,1]} f d\mu = 9 \quad (3)$$

$$\int_{[0,1]} f d\mu \text{ موجود نیست.} \quad (4)$$

۴۰- فرض کنید (X, μ) یک فضای اندازه و برای هر f_n, n و f توابعی نامنفی و انتگرال پذیر بر X باشند که تقریباً همه جا

$$f_n \rightarrow f \text{ و برای هر } n, \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu = 1. \text{ کدام شرط برای برقراری تساوی } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \left(f_n^{\frac{1}{2}} - f^{\frac{1}{2}} \right)^2 d\mu = 0$$

ضروری است؟

(۱) باید همگرایی $f_n \rightarrow f$ بر X یکنواخت باشد. (۲) باید دنباله $\{f_n\}$ صعودی یا نزولی باشد.

(۳) باید از مرتبه ای به بعد $f_n = f$. (۴) هیچ شرطی ضروری نیست.

۴۱- فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی کراندار باشد. در این صورت کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر f انتگرال پذیر لبگ باشد، انتگرال پذیر ریمان هم هست.

(۲) ممکن است f اندازه پذیر باشد، ولی انتگرال پذیر لبگ نباشد.

(۳) اگر $|f|$ انتگرال پذیر لبگ باشد، آنگاه f انتگرال پذیر ریمان است.

(۴) ممکن است $|f|$ انتگرال پذیر لبگ باشد ولی f انتگرال پذیر لبگ نباشد.

۴۲- فرض کنید (X, μ) یک فضای اندازه و برای هر f_n, n و f توابع اندازه پذیر بر X باشند، به طوری که $\int_X |f_n - f|^3 d\mu \rightarrow 0$

کدام گزینه نادرست است؟

$$\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \quad (1)$$

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \text{ (همگرایی در اندازه)} \quad (2)$$

$$\int_X f_n g d\mu \rightarrow \int_X f g d\mu, \quad g \in L^2(\mu) \text{ برای هر } (3)$$

$$\{f_{k_n}\} \text{ از } \{f_n\} \text{ وجود دارد به طوری که } f_{k_n} \rightarrow f(a.c.) \quad (4)$$

۴۳- کدام یک از مجموعه های زیر در فضای $L_1([0,1])$ بسته است؟

$$(1) L_1([0,1])$$

$$(2) C([0,1])$$

$$(3) A = \{f \in L_1([0,1]) : \|f\|_1 \leq 1\}$$

$$(4) B = \{f \in L_1([0,1]) : |f| \leq \phi \text{ (a.e.)}\}$$
 که ϕ تابعی مثبت است.

۴۴- فرض کنید $T: X \rightarrow Y$ یک عملگر خطی بین فضاهای باناخ X و Y باشد، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) عملگر T کراندار است اگر در صفر پیوسته باشد.

(۲) عملگر T در صورتی کراندار است که نمودار T (گراف T) در $X \times Y$ بسته باشد.

(۳) اگر عملگر T دوسویی و پیوسته باشد، ممکن است T^{-1} پیوسته نباشد.

(۴) اگر عملگر T کراندار و پوشا باشد، آنگاه T مجموعه های باز را به مجموعه های باز می نگارد.

۴۵- فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $\{x_i\}_{i \in I}$ خانواده ای نامشمار و یکامتعامد در H باشد. اگر $x \in H \setminus \{0\}$ و

(x_i, x) ضرب درونی x و x_i باشد، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

$$(1) \sum_{i \in I} |(x_i, x)|^2 \leq \|x\|^2$$

$$(2) \sum_{i \in I} |(x_i, x)| \leq \|x\|$$

(۳) مجموعه $\{i \in I : (x_i, x) = 0\}$ نامتناهی است.

(۴) دنباله ای از خانواده $\{x_i\}_{i \in I}$ مانند $\{x_{i_n}\}$ یافت می شود که $(x_{i_n}, x) \rightarrow 0$ به عنوان $n \rightarrow \infty$.

جبر پیشرفته ۱:

۴۶- فرض کنید R یک حلقه جابه جایی و یکدار است. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر R حلقه ای آرتینی باشد، آنگاه $R[x]$ حلقه ای آرتینی است.

(۲) اگر R حلقه ای نوتری باشد، آنگاه $R[x]$ حلقه ای نوتری است.

(۳) اگر R حلقه ای نوتری باشد، آنگاه $R[x, y]$ حلقه ای نوتری است.

(۴) اگر $R[x]$ حلقه ای آرتینی باشد، آنگاه R حلقه ای آرتینی است.

۴۷- اگر $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z})$ و $N = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ ، آنگاه کدام یک از یکرختی های زیر به عنوان

$\mathbb{Z}$ - مدول درست است؟

$$(1) M \cong N \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$$

$$(2) N \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} \text{ و } M \cong \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$$

$$(3) M \cong N \cong \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$$

$$(4) N \cong \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} \text{ و } M \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$$

۴۸- کدام گزینه درست است؟ (به عنوان یکرختی گروه های آبدی)

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{1400}, \mathbb{Z}_{1402}) \cong \mathbb{Z}_{1400} \quad (۲) \quad \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{1400}, \mathbb{Z}_{1402}) \cong \langle 0 \rangle \quad (۱)$$

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{1400}, \mathbb{Z}_{1402}) \cong \mathbb{Z}_2 \quad (۴) \quad \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{1400}, \mathbb{Z}_{1402}) \cong \mathbb{Z}_{1402} \quad (۳)$$

۴۹- در مورد $\mathbb{Z}$ -مدول $\mathbb{Q}[x] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x]$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱) نه تصویری است و نه تزریقی

(۲) هم تصویری است و هم تزریقی

(۳) تصویری است ولی تزریقی نیست.

(۴) تزریقی است ولی تصویری نیست.

۵۰- فرض کنید $a \in \mathbb{Z}_{28}$ و $a \neq 0$ به ازای هر $\mathbb{Z}_{28}$ -مدول ساده مانند M داشته باشیم $aM = 0$. در این صورت a برابر کدام مورد است؟

(۱) ۱۴

(۲) ۱۵

(۳) ۱۶

(۴) ۱۷

۵۱- تعداد اعضای $J(\mathbb{Z}_{1400})$ کدام گزینه است؟ ($J(R)$ ، رادیکال جیکوبسن حلقه R می باشد).

(۱) ۲۰

(۲) ۲۵

(۳) ۵۶

(۴) ۱۰۰

۵۲- اگر M یک $\mathbb{Z}_{10}$ -مدول آرتینی آزاد باشد، آنگاه کدام گزینه در مورد M به عنوان $\mathbb{Z}$ -مدول درست است؟

(۱) نه نوتری است و نه آرتینی

(۲) هم نوتری است و هم آرتینی

(۳) نوتری نیست ولی آرتینی است.

(۴) نوتری است ولی آرتینی نیست.

۵۳- فرض کنید R حلقه ای یکدار و $f: R \rightarrow R$ تابعی باشد که به ازای هر $a, b \in R$ ، در شرایط زیر صدق می کند:

$$۱) f(a+b) = f(a) + f(b) \quad , \quad ۲) f(ab) = f(b)f(a) \quad , \quad ۳) f(f(a)) = a$$

در این صورت کدام گزینه در مورد رادیکال جیکوبسن R درست است؟

$$f(J(R)) = J(R) \quad (۱)$$

$$J(R) \subsetneq f(J(R)) \quad (۲)$$

$$f(J(R)) \subsetneq J(R) \quad (۳)$$

(۴) بستگی به حلقه R دارد و ممکن است هر یک از حالات مذکور در گزینه های دیگر رخ دهد.

۵۴- $\mathbb{C}[x]$ -مدول $\text{Hom}_{\mathbb{C}[x]} \left(\frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x^2 \rangle}, \frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x \rangle} \right)$ ، با کدام گزینه یکرخت است؟

(۱) صفر

$$\frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x^2 \rangle} \quad (۲)$$

$$\frac{\mathbb{C}[x]}{\langle x \rangle} \quad (۳)$$

$$\frac{\langle x \rangle}{\langle x^2 \rangle} \quad (۴)$$

۵۵- فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار و تنها دارای یک ایده‌آل ماکسیمال باشد که به‌عنوان $-R$ مدول تزریقی است. اگر J و I ایده‌آل‌هایی از R باشند که $I \cap J = (0)$ ، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

(۱) $\frac{R}{J}$ یا $\frac{R}{I}$ یک $-R$ مدول آزاد است.

(۲) یک $-R$ هم‌ریختی $\psi: R \rightarrow \frac{R}{I} \oplus \frac{R}{J}$ وجود دارد که یک به یک است.

(۳) یک $-R$ هم‌ریختی $\phi: \frac{R}{I} \oplus \frac{R}{J} \rightarrow R$ وجود دارد که پوشاست.

(۴) $\frac{R}{I}$ یا $\frac{R}{J}$ یک $-R$ مدول تصویری است ولی آزاد نیست.

بهینه‌سازی خطی پیشرفته ۱:

۵۶- اگر برای مسئله

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= c^T x \\ \text{s.t. } Ax &\geq b \end{aligned}$$

با $b \leq 0$ داشته باشیم: $Ax \geq b \Rightarrow c^T x \leq 0$ آنگاه

(۱) $v \geq 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $A^T v \leq c$

(۲) $v \geq 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $A^T v \geq c$

(۳) $v \geq 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $A^T v = c^T$

(۴) $v \leq 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $A^T v = c$

۵۷- مسئله (P) را به‌صورت

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= \sum_{i=1}^n x_i \\ \text{s.t. } Ax &= 0 \quad (P) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

در نظر بگیرید که در آن، A ، $m \times n$ داده شده است. دوگان (P) را (D) بنامید. اگر (P) جواب شدنی $x \neq 0$ داشته باشد، آنگاه

(۱) (P) بی‌کران است.

(۲) (D) بی‌کران است.

(۳) (P) و (D) هر دو بی‌کران هستند.

(۴) (P) و (D) جواب‌های بهینه دارند.

۵۸- فرض کنید برای مسئله برنامه‌ریزی خطی به صورت

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c^T x \\ \text{s.t. } Ax &= b \quad (P) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

جواب بهینه X^* با پایه بهینه B در دست است. بردار c را با $d \neq c$ جایگزین کنید. قرار دهید $\bar{y}_j = d_B^T B^{-1} a_j - d_j$ به ازای هر j . گزینه درست را انتخاب کنید.

(۱) $\bar{y}_j$ ، به‌ازای هر j به‌طوری که x_j متغیر غیرپایه‌ای، آزاد است.

(۲) $\bar{y}_j \leq 0$ ، به‌ازای هر j

(۳) $\bar{y}_j \geq 0$ ، به‌ازای هر j

(۴) $\bar{y}_j \neq 0$ ، به‌ازای هر j

۵۹- برای مسئله (P) به صورت

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c^T x \\ \text{s.t. } Ax &= b \quad (P) \\ 0 &\leq x \leq u \end{aligned}$$

گزینه درست را انتخاب کنید.

(۱) (P) می‌تواند بی‌کران باشد.

(۲) (P) می‌تواند ناشدنی باشد ولی دوگان (P) شدنی است.

(۳) (P) همواره شدنی است و جواب بهینه دارد.

(۴) (P) و دوگان (P) هر دو می‌توانند ناشدنی باشد.

۶۰- فرض کنید یک مسئله (P) به صورت

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c^T x \\ \text{s.t. } Ax &= b \quad (P) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

دارای جواب بهینه است. قید جدید $d^T x = h_0$ را به (P) اضافه کنید و مسئله جدید را (P') بنامید. گزینه درست را انتخاب کنید.

(۱) (P') همواره جواب بهینه دارد.

(۲) (P') می‌تواند بی‌کران باشد.

(۳) (P') یا ناشدنی است یا جواب بهینه دارد.

(۴) دوگان (P') نمی‌تواند بی‌کران باشد.

۶۱- مسئله اولیه (P) را به صورت

$$\begin{aligned} \text{Max } t &= b^T y + L^T v + U^T w \\ \text{s.t. } A^T y + v + w &= c \quad (P) \\ v &\geq 0 \\ w &\leq 0 \end{aligned}$$

در نظر بگیرید و دوگان آن را (D) بنامید. گزینه درست را انتخاب کنید.

(۱) (D) همواره شدنی است.

(۲) (D) همواره جواب بهینه دارد.

(۳) (P) بی‌کران است، اگر (D) ناشدنی باشد.

(۴) (D) و (P) هر دو ناشدنی هستند.

۶۲- مسئله (P) را به صورت

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (1) \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (2) \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (P)$$

در نظر بگیرید و دوگان آن را (D) بنامید. متغیرهای دوگان مربوط به قید i ام در (۱) و قید j ام در (۲) را به ترتیب u_i و v_j بگیرید. اگر x و (u, v) به ترتیب برای (P) و (D) نقاط بهینه کننده باشند، آنگاه

$$(1) \quad u_i + v_j \geq 1, \quad \text{به ازای هر } i \text{ و } j$$

$$(2) \quad u_i + v_j = 1 \text{ یا } x_{ij} = 0, \quad \text{به ازای هر } i \text{ و } j$$

$$(3) \quad u_i + v_j = 1 \text{ یا } x_{ij} \neq 0, \quad \text{به ازای هر } i \text{ و } j$$

$$(4) \quad u_i + v_j \leq 1 \text{ یا } x_{ij} > 0, \quad \text{به ازای هر } i \text{ و } j$$

۶۳- مسئله برنامه ریزی خطی (P) را که در آن، $A = -A^T$ در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq c \quad (P) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

گزینه درست را در مورد مسئله (P) انتخاب کنید.

(۱) ناشدنی است.

(۲) بی کران است یا ناشدنی است.

(۳) یا ناشدنی است یا بی کران است یا جواب بهینه دارد.

(۴) یا ناشدنی است یا جواب بهینه دارد.

۶۴- مسئله های برنامه ریزی خطی (P) و (R) را به صورت های زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \quad (P) \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{Min } t &= c^T x + M \sum_{i=1}^n y_i \\ \text{s.t.} \quad & Ax + y = b \quad (R) \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

اگر (P) جواب بهینه با مقدار z^* داشته باشد، آنگاه (R)

(۱) می تواند ناشدنی باشد.

(۲) می تواند به ازای برخی $M > 0$ بی کران باشد.

(۳) می تواند به ازای برخی $M > 0$ جواب بهینه با مقدار بهینه بیشتر از z^* داشته باشد.

(۴) به ازای هر $M > 0$ ، جواب بهینه با مقدار بهینه نابیشتر از z^* دارد.

۶۵- مسئله برنامه ریزی خطی استاندارد را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c^T x \\ \text{s.t. } Ax &= b \quad (P) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید $x > 0$ و $s > 0$ وجود دارند به طوری که $Ax = b$ و $A^T y + s = c$ ، بازای برخی y . گزینه درست را انتخاب کنید.

- (۱) جواب بهینه دارد. (P)
 (۲) می تواند بی کران باشد. (P)
 (۳) دوگان (P) می تواند ناشدنی باشد.
 (۴) دوگان (P) می تواند بی کران باشد.

اصول آموزش ریاضی:

۶۶- آخرین رویکرد قالب جهانی در تولید برنامه درسی ریاضی قبل از «استانداردهای هسته مشترک برنامه درسی ریاضی» (Common Core Mathematics Curriculum Standards)، کدام بود؟

- (۱) استانداردهای برنامه درسی ریاضی
 (۲) رویکرد حل مسئله
 (۳) دوره ریاضی جدید
 (۴) نهضت رجعت به اصول

۶۷- منظور از واژه «فروم» در آموزش ریاضی، چیست؟

- (۱) فرایند ریاضی
 (۲) عبارتی موهوم در ریاضی
 (۳) مفهوم ریاضی
 (۴) دربرگیرنده فرایند و مفهوم ریاضی

۶۸- رشته «آموزش ریاضی»، مولود کدام یک از دیسپلین های دانشگاهی بود؟

- (۱) علوم تربیتی
 (۲) روان شناسی
 (۳) ریاضی
 (۴) فلسفه

۶۹- سازمان اصلی متولی آموزش ریاضی در جهان، کدام یک از موردهای زیر است؟

- (۱) کنفرانس بین المللی آموزش ریاضی (ICME)
 (۲) اتحادیه بین المللی / جهانی ریاضی (IMU)
 (۳) کمیسیون بین المللی تدریس ریاضی (ICMI)
 (۴) گروه بین المللی روان شناسی آموزش ریاضی (PME)

۷۰- از نظر ریچارد اسکمپ، دو مؤلفه اصلی نظریه «یادگیری هوشمند» در آموزش ریاضی، کدامند؟

- (۱) فهم رویه ای و فهم معنادار
 (۲) فهم ابزاری و فهم رابطه ای
 (۳) فهم رابطه ای و فهم طوطی وار
 (۴) فهم عمیق و فهم کاربردی قواعد

۷۱- از نظر هیگنسون (۱۹۸۱)، اصول آموزش ریاضی توسط کدام چهار گروه زیر تبیین می شوند؟

- (۱) ریاضی دانان، معلمان، آموزشگران معلمان و پژوهشگران آموزش ریاضی
 (۲) معلمان، آموزشگران معلمان، سیاست گذاران و پژوهشگران آموزش ریاضی
 (۳) ریاضی دانان، تدوین کنندگان برنامه درسی، معلمان و آموزشگران معلمان ریاضی
 (۴) معلمان، تدوین کنندگان برنامه درسی، آموزشگران معلمان و پژوهشگران آموزش ریاضی

۷۲- در رویکرد یادگیری «آموزش ریاضیات واقعیت مدار»، ریاضی چگونه تبیین شده است؟

- (۱) ریاضی یک فعالیت انسانی است.
 (۲) ریاضی قطعیت است.
 (۳) ریاضی دانش پیشینی است.
 (۴) ریاضی مستقل از زمینه دنیای واقعی است.

- ۷۳- کدام گزینه، دامنهٔ فعالیت‌های آموزشگران ریاضی را توضیح می‌دهد؟
- (۱) تدریس ریاضی، به‌کارگیری نظریه‌ها در پژوهش‌های آموزش ریاضی
 - (۲) تبیین نظریه‌های جدید یادگیری ریاضی، توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی
 - (۳) تدوین برنامه‌های درسی ریاضی، تبیین نظریه‌های جدید یادگیری ریاضی
 - (۴) هر سه مورد صحیح است.
- ۷۴- با شیوع همه‌گیری کووید - ۱۹ و فراگیر شدن آموزش مجازی در جهان، «فناوری‌های دیجیتال» در فرایند تدریس و یادگیری ریاضی، چه تغییری ایجاد کرده است؟
- (۱) تغییر نقش فناوری دیجیتال از ابزاری در خدمت تدریس و یادگیری ریاضی، به رسانهٔ یادگیری
 - (۲) تغییر نقش معلم ریاضی کلاس درس از منبع اصلی تدریس به کاربر فناوری دیجیتال
 - (۳) تغییر رویکرد به ارزشیابی ریاضی از آزمون‌های تشریحی به آزمون‌های چندگزینه‌ای آنلاین
 - (۴) مناسب‌سازی برنامهٔ درسی ریاضی موجود برای آموزش مجازی
- ۷۵- آلن بیشاپ، دو مؤلفه را در آموزش ریاضی مطرح کرد تا این ادعا را که «ریاضی یک زبان بین‌المللی» است و در همه جا، یک و تنها یک روش ارائه دارد، به چالش بکشد. این دو مؤلفه کدامند؟
- (۱) حل مسئله و فرهنگ‌ها
 - (۲) فرهنگ‌ها و ارزش‌ها
 - (۳) بازنمایی‌ها و ارزش‌ها
 - (۴) ارزش‌ها و مسائل دنیای واقعی

