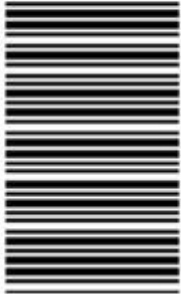


128

A



128A

نام:

نام خانوادگی:

محل امضا:

دفترچه شماره (۱)		«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.» امام خمینی (ره)		
صبح جمعه ۱۳۹۴/۱۲/۱۴	جمهوری اسلامی ایران وزارت علوم، تحقیقات و فناوری سازمان سنجش آموزش کشور			
آزمون ورودی دوره دکتری (نیمه‌متمرکز) – سال ۱۳۹۵				
آمار (کد ۲۲۰۸)				
مدت پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه		تعداد سؤال: ۴۵		
عنوان دروس اختصاصی، تعداد و شماره سؤال‌ها				
ردیف	دروس اختصاصی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	ریاضی عمومی، احتمال، آمار ریاضی	۴۵	۱	۴۵
این آزمون نمره منفی دارد. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.				
حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متغلفین برابر مکررات رفتار می‌شود.				

ریاضی عمومی:

۱- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^{17} + \left(\frac{2}{n}\right)^{17} + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^{17} \right)$ کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۱۸ (۲)
- ۱۷ (۳)
- ∞ (۴)

۲- تعداد جواب‌های معادله $z^2 = i\bar{z}$ کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

۳- مقدار سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\pi^n}$ کدام است؟

- $\frac{\pi^2}{(\pi-1)^2}$ (۱)
- $\frac{\pi^2}{(\pi+1)^2}$ (۲)
- $\frac{\pi}{(\pi-1)^2}$ (۳)
- $\frac{\pi}{(\pi+1)^2}$ (۴)

۴- بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ کدام است؟

- $[-e^{-2}, e^{-2}]$ (۱)
- $(-e^{-2}, e^{-2})$ (۲)
- $\left(-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right)$ (۳)
- $\left[-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right]$ (۴)

۵- اگر f در بازه‌ای شامل صفر پیوسته باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \operatorname{tgh}^2 t dt$ کدام است؟

(۱) -۱

(۲) ۰

(۳) ۱

(۴) $+\infty$

۶- اگر $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 2$ مقدار $(f^{-1})''(2)$ کدام است؟

(۱) -۳۶

(۲) -۶

(۳) $-\frac{1}{6}$

(۴) $-\frac{1}{۳۶}$

۷- اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد که $f(0) = 0$ ، $f'(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ ، کدام نامساوی درست است؟

(۱) $|f(x)| \leq 1$

(۲) $|f(x)| \leq x^4$

(۳) $|f(x)| \leq |x|$

(۴) $|x| \leq |f(x)|$

۸- مقدار $I = \int_1^2 x \sqrt{\frac{1}{x-1}} dx$ کدام است؟

(۱) $\frac{8}{3}$

(۲) $\frac{4}{3}$

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) موجود نیست

۹- مقدار $\int_0^2 \int_0^{-\frac{1}{2}y+1} \frac{e^x}{x-1} dx dy$ کدام است؟

(۱) $e-1$

(۲) $1-e$

(۳) $2(1-e)$

(۴) $2(e-1)$

۱۰- ماکزیمم نسبی (موضعی) عبارت $xy + \frac{64}{x} - \frac{1}{y}$ ، کدام است؟

(۱) -۸

(۲) -۱۲

(۳) -۱۰

(۴) ماکزیمم نسبی ندارد.

۱۱- اگر $z = e^x \sin y$ ، $x = t^2 + 1$ ، $y = \ln t$ ، آنگاه $\frac{\partial z}{\partial t}$ کدام است؟

(۱) $2te^{t^2+1} \cos(\ln t) + \frac{e^{t^2+1} \cos(\ln t)}{t}$

(۲) $2te^{t^2+1} \sin(\ln t) + \frac{e^{t^2+1} \cos(\ln t)}{t}$

(۳) $te^{t^2+1} \sin(\ln t) + \frac{e^{t^2+1} \sin(\ln t)}{t}$

(۴) $e^{t^2+1} \cos(\ln t) + e^{t^2+1} \sin(\ln t)$

۱۲- مقدار انتگرال خط $\oint_C -\frac{y^5}{5} dx + (\frac{x^5}{5} + \frac{2x^2y^2}{3}) dy$ روی دایره $x^2 + y^2 = 1$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{3}$

(۲) $\frac{\pi}{5}$

(۳) $-\frac{\pi}{3}$

(۴) $-\frac{\pi}{5}$

احتمال:

۱۳- ضریب تغییر و میانه یک نمونه دوتایی به ترتیب برابر ۴ و $\frac{1}{4}$ می‌باشد. برد نمونه‌ای این دو داده کدام است؟

(۱) ۲

(۲) $2\sqrt{2}$

(۳) $4\sqrt{2}$

(۴) ۸

۱۴- یک حرف از واژه RESERVE و یک حرف از واژه VERTICAL به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که دو حرف انتخابی متفاوت باشند، برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{28}$
 (۲) $\frac{3}{28}$
 (۳) $\frac{25}{28}$
 (۴) $\frac{27}{28}$

۱۵- در ظرفی ۲۰ مهره سیاه و ۵ مهره سفید موجود است. دو شخص A و B به ترتیب و با جایگذاری از این ظرف مهره برمی‌دارند. برنده کسی است که برای اولین بار مهره سفید ببیند. احتمال برنده شدن شخص B چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$
 (۲) $\frac{4}{25}$
 (۳) $\frac{4}{9}$
 (۴) $\frac{5}{9}$

۱۶- از تمام 2^{10} زیرمجموعه‌ی مستقل و هم‌شانس $S = \{1, 2, \dots, 10\}$ ، دو زیرمجموعه انتخاب می‌کنیم و آن‌ها را A و B می‌نامیم. مقدار $P(A \subseteq B)$ کدام است؟

- (۱) ۰
 (۲) $\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$
 (۳) $\left(\frac{2}{4}\right)^{10}$
 (۴) $\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$

۱۷- بازیکن A، سکه سالمی را $N+1$ مرتبه پرتاب می‌کند و بازیکن B مستقل از بازیکن A سکه سالمی را N مرتبه پرتاب می‌کند. بازیکن A برنده می‌شود اگر تعداد شیرهای او بیشتر از تعداد شیرهای بازیکن B باشد. احتمال اینکه بازیکن A بازی را ببرد برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{4}$
 (۲) $\frac{1}{3}$
 (۳) $\frac{1}{2}$
 (۴) $\frac{3}{4}$

۱۸- فرض کنید A_1, A_2, \dots, A_n پیشامدهای مستقل روی فضای نمونه مشترک S و احتمال رخ دادن هر کدام $\frac{1}{n}$ باشد. احتمال اینکه دقیقاً یکی از آن‌ها رخ دهد برابر است با:

(۱) $(1 - \frac{1}{n})^{n-1}$

(۲) $(\frac{1}{n})^{n-1}$

(۳) $(\frac{1}{n})^n$

(۴) $(1 - \frac{1}{n})^n$

۱۹- یک جهانگرد که در یک منطقه گمشده است به یک سه‌راهی می‌رسد. راه اول او را پس از یک ساعت راهپیمایی مجدداً به نقطه اول برمی‌گرداند، راه دوم نیز او را پس از ۶ ساعت راهپیمایی مجدداً به نقطه اول برمی‌گرداند، ولی راه سوم او را پس از ۲ ساعت راهپیمایی به مقصد می‌رساند. با فرض اینکه هیچ علامتی در مسیر وجود ندارد و جهانگرد راه‌ها را با شانس مساوی انتخاب کند، میانگین زمانی (برحسب ساعت) که وی سرانجام به مقصد می‌رسد چقدر است؟

(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۸

(۴) ۹

۲۰- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکسان $U(0,1)$ باشند. توزیع $U = \frac{\ln X}{\ln XY}$ کدام است؟

(۱) $U(0,1)$

(۲) $Beta(2,2)$

(۳) $Beta(1,2)$

(۴) $Beta(2,1)$

۲۱- متغیر تصادفی X را در نظر بگیرید. به ازاء چه مقداری از a ، مقدار میانگین مربع فاصله نقطه $(a,1)$ از نقطه $(X,0)$ مینیمم می‌شود؟

(۱) $E(X^2)$

(۲) $E(X)$

(۳) $med(X)$ (میان)

(۴) $mod(X)$ (نما)

۲۲- تعداد ادعاهای رسیده در یک هفته به یک شرکت بیمه متغیری تصادفی مانند N با تابع احتمال

$$p(N = n) = 2^{-n-1}, \quad n \geq 0$$

می‌باشد. تعداد ادعای رسیده در یک هفته مستقل از هفته‌های دیگر است. احتمال اینکه دقیقاً ۷ ادعا در طول دو هفته به این شرکت برسد چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{32}$

(۲) $\frac{1}{64}$

(۳) $\frac{1}{128}$

(۴) $\frac{1}{256}$

۲۳- فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی با تابع توزیع $F_X(x)$ و Y یک متغیر تصادفی با تابع توزیع

$$G_Y(t) = 1 - E(e^{-tX}), \quad t \geq 0$$

در صورت وجود، مقدار $E(Y)$ کدام است؟

(۱) $E\left(\frac{1}{X}\right)$

(۲) $E(X)$

(۳) $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$

(۴) $1 + E(X)$

۲۴- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با مجموعه مقادیر ممکن $\{1, 2, 3, \dots\}$ و تابع مولد احتمال زیر باشد. مقدار

$$P(X = 2)$$

کدام است؟

$$\Phi_X(s) = \frac{s^2}{(3-2s)^2}, \quad |s| < 1$$

(۱) $\frac{1}{9}$

(۲) $\frac{2}{9}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۴) $\frac{2}{3}$

۲۵- فرض کنید هر دانشجو در روز قبل از امتحان یک سؤال از استاد درس می‌پرسد که با احتمال p در امتحان خواهد آمد. اگر تعداد دانشجویانی که در یک روز قصد سؤال از استاد را دارند دارای توزیع پواسن با میانگین λ باشد، احتمال اینکه استاد جوابی به سؤالی که در امتحان می‌آید ندهد، چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{1}{2}p$

(۳) $e^{-\frac{1}{2}\lambda p}$

(۴) $e^{-\lambda p}$

۲۶- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر p باشد. مقدار $E(S^2 | \bar{X} = \bar{x})$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) \bar{x}

(۳) $\bar{x}(1 - \bar{x})$

(۴) $\frac{n}{n-1} \bar{x}(1 - \bar{x})$

۲۷- فرض کنید $X \sim U(0, 12)$ و $Y | X = x \sim U(0, x)$ باشند. مقدار $\text{cov}(X, Y)$ کدام است؟

(۱) -3

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) 6

(۴) $\frac{1}{2}$

۲۸- فرض کنید $X \sim U(0, 1)$ و $Y | X = x \sim B(n, x)$ باشد، ضریب همبستگی (X, Y) وقتی $n \rightarrow \infty$ برابر است با:

(۱) 0

(۲) 1

(۳) $-\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{1}{2}$

۲۹- فرض کنید $X | Y = y \sim P(y)$ و $Y \sim \Gamma(5, 1)$ باشند. توزیع کناری X کدام است؟

(۱) $B(4, \frac{1}{2})$

(۲) $NB(4, \frac{1}{2})$

(۳) $NB(5, \frac{1}{2})$

(۴) توزیع استاندارد و شناخته‌شده‌ای ندارد.

۳۰- فرض کنید $\{X_n\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با توزیع هندسی $G(\frac{\lambda}{n})$ است که در آن $n > \lambda > 0$. اگر

$$Z_n = \frac{X_n}{n}, \text{ توزیع حدی } Z_n \text{ کدام است؟}$$

(۱) $E(\lambda)$

(۲) $N(0,1)$

(۳) $E(1)$

(۴) $NB(n, \frac{\lambda}{n})$

آمار ریاضی:

۳۱- فرض کنید X_1, \dots, X_m و Y_1, \dots, Y_n دو نمونه تصادفی مستقل از توزیع‌های نمایی منفی به ترتیب با میانگین‌های μ و λ باشند، برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی برای $P(X_1 > Y_1)$ کدام است؟

(۱) $\frac{\bar{X}}{\bar{Y} + n}$

(۲) $\frac{\bar{Y}}{\bar{X} + m}$

(۳) $\frac{\bar{Y}}{\bar{X} + \bar{Y}}$

(۴) $\frac{\bar{X}}{\bar{X} + \bar{Y}}$

۳۲- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر P باشد، برآورد ML $E\left(\frac{n+1}{\sum X_i + 1} - \frac{1}{P}\right)$ کدام

است؟ فرض کنید، $y = \sum_{i=1}^n x_i$.

(۱) $-\frac{n}{y} \left(1 - \frac{y}{n}\right)^{n+1}$

(۲) $\frac{n}{y} \left(1 - \frac{y}{n}\right)^{n+1}$

(۳) $\frac{n}{y} \left(1 - \frac{y}{n}\right)$

(۴) $-\frac{n}{y} \left(1 - \frac{y}{n}\right)$

۳۳- فرض کنید به ازای $0 < \theta < \frac{1}{2}$ تابع احتمال توأم (X_1, X_2) به صورت زیر باشد. کدام یک از آماره‌های زیر بسنده مینماید است؟

(X_1, X_2)	$(2, 1)$	$(0, 3)$	$(2, 0)$	$(0, 2)$
$P(X_1, X_2)$	$\frac{3}{2}\theta$	$\frac{1}{2}\theta$	$\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\theta$	$\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\theta$

$X_1 + X_2$ (۱)

$X_1^2 + 2X_2$ (۲)

$X_1^2 + X_2 - X_1$ (۳)

(۴) هر سه گزینه

۳۴- اگر X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع $U(0, \theta)$ باشد، مقدار $E\left[\prod_{i=1}^n \frac{X_i}{X_{(n)}}\right]$ کدام است؟

2^{n-1} (۱)

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (۲)

2^n (۳)

$\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (۴)

۳۵- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع $N(\theta, 1)$ باشد. اگر $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ و $\tilde{X} = \text{med}(X_1, \dots, X_n)$

باشند، مقدار $(\text{COV}(\bar{X}, \tilde{X}), E(\tilde{X} - S^2 | \bar{X}))$ کدام است؟

$(-\frac{1}{n}, \bar{X})$ (۱)

$(-\frac{1}{n}, \bar{X} - 1)$ (۲)

$(\frac{1}{n}, \bar{X} - 1)$ (۳)

$(\frac{1}{n}, \bar{X})$ (۴)

۳۶- فرض کنید X دارای توزیع یکنواخت گسسته در بین $\{1, 2, \dots, \theta\}$ باشد، به طوری که $\theta \in \{2, 3\}$ است. کدام گزینه UMVUE برای θ است؟

$h(x) = \begin{cases} 2 & x = 1, 2 \\ 5 & x = 3 \end{cases}$ (۱)

$h(x) = \begin{cases} 2 & x = 2, 3 \\ 5 & x = 1 \end{cases}$ (۲)

$h(x) = 2x - 1$ (۳)

(۴) MVUE وجود ندارد.

۳۷- فرض کنید X یک مشاهده، از توزیعی با تابع چگالی احتمال $f(x) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}}$ باشد. برآوردگر UMVU برای

$\frac{1}{1+\theta}$ کدام است؟

(۱) $|x|$

(۲) $e^{-|x|}$

(۳) $\frac{1}{1+|x|}$

(۴) $\frac{|x|}{1+|x|}$

۳۸- فرض کنید در برآورد ناریب پارامتر $g(\theta) = \theta$ برحسب نمونه تصادفی X_1, \dots, X_n ، اطلاع فیشر θ برابر

$I(\theta) = \frac{4}{\theta^2}$ به‌دست آمده است. اگر $\eta = \sqrt{\theta}$ باشد، آنگاه $(I(\eta), CRLB_{\eta})$ کدام است؟

(کران پایین کرامر-رائو $\approx CRLB$).

(۱) $(\frac{16}{\theta}, \frac{\theta^2}{4})$

(۲) $(\frac{16}{\theta}, \frac{4}{\theta^2})$

(۳) $(\frac{4}{\theta^2}, \frac{4}{\theta^2})$

(۴) $(16\theta, \frac{\theta^2}{4})$

۳۹- فرض کنید X دارای توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_{\theta}(x) = \frac{2x}{\theta^2} \quad 0 < x < \theta$$

یک‌فاصله اطمینان ۹۰٪ با دم‌های برابر برای θ کدام است؟

(۱) $(\sqrt{\frac{19}{20}}X, \sqrt{\frac{20}{19}}X)$

(۲) $(\sqrt{\frac{20}{19}}X, \sqrt{\frac{19}{20}}X)$

(۳) $(\frac{1}{\sqrt{20}}X, \sqrt{20}X)$

(۴) $(\sqrt{19}X, \sqrt{20}X)$

۴۰- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع یکنواخت در بازه $(\theta - 1, \theta + 1)$ باشد. بر اساس کمیت محوری $X_{(1)} - \theta$ کوتاه‌ترین فاصله اطمینان با ضریب اطمینان $(1 - \alpha)$ درصد برای θ کدام است؟

(۱) $(x_{(1)} - 1, x_{(1)} + 1 + 2\sqrt[3]{\alpha})$

(۲) $(x_{(1)} - 1 + 2\sqrt[3]{\alpha}, x_{(1)} + 1)$

(۳) $(x_{(1)} - 1, x_{(1)} + 2\sqrt[3]{\alpha})$

(۴) $(x_{(1)} - 2\sqrt[3]{\alpha}, x_{(1)} + 1)$

۴۱- یک نمونه تصادفی از چگالی $f_{\theta}(x) = \theta e^{-\theta x}$ با فرض $\theta > 0$ و $x > 0$ برای آزمون آماری در نظر می‌گیریم. برای کدام آزمون، پرتوان‌ترین ناحیه بحرانی به‌طور یکنواخت یافت نمی‌شود؟

(۱) $H_0: \theta = 1$ در برابر $H_1: \theta = 3$

(۲) $H_0: \theta = 3$ در برابر $H_1: \theta^2 < 3$

(۳) $H_0: \theta = 2$ در برابر $H_1: \theta^2 > 2\theta$

(۴) $H_0: \theta = 2$ در برابر $H_1: 6 + \theta^2 > 5\theta$

۴۲- اگر X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد:

$X = x$	۱	۲
$f(X = x)$	$\frac{1+\theta}{2}$	$\frac{1-\theta}{2}$

$-1 \leq \theta \leq 1$

ناحیه بحرانی پرتوان‌ترین آزمون یکنواخت در آزمودن فرض $H_0: \theta \leq 0$ در مقابل $H_1: \theta > 0$ کدام است؟

(۱) $\sum_{i=1}^n X_i^2 < C$

(۲) $\sum_{i=1}^n X_i > C$

(۳) $\sum_{i=1}^n X_i < C$

(۴) $\sum_{i=1}^n X_i^2 > C$

۴۳- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از چگالی زیر باشد.

$$f(x | \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}, x \geq \mu, \sigma > 0$$

که در آن μ و σ هر دو نامعلوم‌اند. اگر ناحیه رد آزمون نسبت درستی برای فرض‌های $H_0: \mu = 0$ در برابر

$H_1: \mu \neq 0$ به‌صورت $\frac{X_{(1)}}{\sum X_i} > C$ باشد، با $\alpha = 0.05$ مقدار C کدام است؟

(۱) $1 - \sqrt[0.95]{n}$

(۲) $1 - \sqrt[0.05]{n}$

(۳) $1 - \sqrt[0.05]{n}$

(۴) $1 - \sqrt[0.95]{n}$

۴۴- فرض کنید متغیر تصادفی X یکی از توابع احتمال زیر را داشته باشد. آزمون نسبت درست‌نمایی به اندازه 0.07 در آزمون فرض $H_0: \theta = \theta_0$ در مقابل $H_1: \theta \neq \theta_0$ کدام است؟

$X = x$	۰	۱	۲	۳	۴
$f_{\theta_0}(x)$	۰/۳	۰/۰۵	۰	۰/۶	۰/۰۵
$f_{\theta_1}(x)$	۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۷	۰/۱
$f_{\theta_2}(x)$	۰/۱	۰/۱	۰/۸	۰	۰

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x=2 \\ \frac{1}{5} & x=0 \\ 0 & x \neq 0, 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x=2 \\ \frac{2}{5} & x=1 \\ 0 & x \neq 1, 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x=1 \\ \frac{2}{5} & x=2 \\ 0 & x \neq 1, 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{7}{10} & x=0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad (3)$$

۴۵- فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند به گونه‌ای که X_i دارای توزیع $N(\theta_i, 1)$ ، $i = 1, \dots, n$ باشد. می‌خواهیم آزمون زیر را انجام دهیم ناحیه بحرانی پرتوان‌ترین آزمون به اندازه α کدام است؟

$$H_0: \theta_i = 0, i = 1, \dots, n \quad \text{در مقابل} \quad H_1: \theta_i = \frac{1}{r}, 1 \leq i \leq r, \theta_j = -\frac{1}{r}, r+1 \leq j \leq n$$

$$\bar{x} > \sqrt{n}Z_\alpha \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^r X_i - \sum_{i=r+1}^n X_i > \sqrt{n}Z_\alpha \quad (2)$$

$$\sum_{i=r+1}^n X_i - \sum_{i=1}^r X_i > \sqrt{n}Z_\alpha \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^r X_i - \sum_{i=r+1}^n X_i > \sqrt{n}Z_\alpha \quad (4)$$

