

# پی‌اچ‌دی تست: نخستین وب‌سایت تخصصی آزمون دکتری

کد کنترل

271

E



نام:

نام خانوادگی:

محل امضا:

		«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.» امام خمینی (ره)	
جمهوری اسلامی ایران وزارت علوم، تحقیقات و فناوری سازمان سنجش آموزش کشور		صبح جمعه ۱۳۹۶/۱۲/۴ دفترچه شماره (۱)	
<b>آزمون ورودی دوره دکتری (نیمه‌متمرکز) - سال ۱۳۹۷</b>			
<b>رشته ریاضی محض (کد ۲۲۳۳)</b>			
مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه		تعداد سؤال: ۴۵	
عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات			
ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی: مبانی آنالیز ریاضی - آنالیز ریاضی - مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی - مبانی جبر - جبر پیشرفته - آنالیز حقیقی	۴۵	۱
این آزمون نمره منفی دارد.		استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.	
حق چاپ و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای نفعی انفرادی حلفی و حقوقی آنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متغییرن برابر عوارض رفتار می‌نماید.			

\* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به‌منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب ..... با شماره داوطلبی ..... در جلسه این آزمون شرکت می‌نمایم.

امضا:

- ۱- فرض کنید  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی یکنوا باشد. کدام گزینه پیوستگی  $f$  را نتیجه نمی‌دهد؟
- (۱)  $f$  برد بسته باشد.
  - (۲)  $f$  خاصیت مقدار میانی داشته باشد.
  - (۳) حد تابع  $f$  در هر نقطه بازه  $[a, b]$  موجود باشد.
  - (۴)  $f$  بر  $[a, b]$  دارای تابع اولیه باشد.
- ۲- فرض کنید  $A = \{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$  زیر مجموعه اعداد حقیقی باشد. ( $\bar{A}$  بستار  $A$  و  $\partial A$  مرز  $A$  است)، کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟
- (۱)  $A$  بسته نیست و  $\partial A \neq \bar{A}$
  - (۲)  $A$  بسته نیست و  $\partial A = \bar{A}$
  - (۳)  $A$  بسته است و  $\partial A = \bar{A}$
  - (۴)  $A$  بسته است و  $\partial A \neq \bar{A}$
- ۳- فرض کنید  $E$  زیر مجموعه‌ای از فضای متریک  $(X, d)$  است به‌طوری‌که  $\bar{E} = E$  و  $E^\circ = \emptyset$ . اگر
- $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$
- آنگاه کدام گزینه درست است؟
- (۱)  $f$  فقط بر  $E^c$  پیوسته است.
  - (۲)  $f$  فقط بر  $E$  پیوسته است.
  - (۳)  $f$  همه‌جا پیوسته است.
  - (۴)  $f$  هیچ‌جا پیوسته نیست.
- ۴- فرض کنید  $d_1$  و  $d_2$  دو متر بر مجموعه ناتهی  $X$  باشند، به‌طوری‌که برای هر دنباله  $\{x_n\}$  در  $X$  و  $x \in X$ ، اگر  $d_1(x_n, x) \rightarrow 0$  آنگاه  $d_2(x_n, x) \rightarrow 0$  کدام گزینه نادرست است؟
- (۱) اگر  $(X, d_1)$  همبند باشد، آنگاه  $(X, d_2)$  همبند است.
  - (۲) اگر  $(X, d_1)$  فشرده باشد، آنگاه  $(X, d_2)$  فشرده است.
  - (۳) اگر  $(X, d_1)$  کامل باشد، آنگاه  $(X, d_2)$  کامل است.
  - (۴) اگر  $E \subseteq X$  در  $(X, d_2)$  بسته باشد، آنگاه  $E$  در  $(X, d_1)$  بسته است.

۵- فرض کنید تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  کراندار،  $a \in \mathbb{R}$  و  $A = \left\{ \frac{f(a) - f(x)}{a - x} : x \in \mathbb{R}, x \neq a \right\}$ . کدام گزینه درست است؟

- (۱) اگر  $A$  بیکران باشد آن‌گاه  $f$  در  $a$  مشتق‌پذیر است.
- (۲) اگر  $f$  در  $a$  مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه  $A$  بیکران است.
- (۳) اگر  $f$  در  $a$  مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه  $A$  کراندار است.
- (۴) اگر  $A$  کراندار باشد آن‌گاه  $f$  در  $a$  مشتق‌پذیر است.

۶- اگر  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته باشد که برای هر  $x \in \mathbb{R}$ ،  $f(x) + x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt = 1$ ، کدام گزینه

درست است؟

- (۱)  $f$  بیکران است.
- (۲)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  موجود است.
- (۳)  $f$  بینهایت بار مشتق‌پذیر است.
- (۴) مجموعه نقاطی که تابع  $f$  صفر می‌شود متناهی است.

۷- تابع  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  را در نظر بگیرید و قرار دهید  $f_n(x) = f(x^n)$  ( $n \geq 1$ ). کدام گزینه شرط لازم و کافی

برای هم‌پیوستگی دنباله  $\{f_n\}$  است؟

- (۱)  $f$  کراندار باشد.
- (۲)  $f$  پیوسته باشد.
- (۳)  $f$  پیوسته یکنواخت باشد.
- (۴)  $f$  تابع ثابت باشد.

۸- سری  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \sin(nx)(1 - \sin x)^n$  بر بازه  $\left[ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]$  ...

- (۱) برای هیچ  $\alpha > 0$  همگرایی نقطه‌ای نیست.
- (۲) برای هر  $\alpha \in \mathbb{R}$  همگرایی یکنواخت است.
- (۳) فقط برای  $\alpha < -1$  همگرایی یکنواخت است.
- (۴) برای هر  $\alpha \in \mathbb{R}$  همگرایی نقطه‌ای است ولی همگرایی یکنواخت نیست.

۹- به ازای چه مقادیری از  $a$  سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \sin(na)}{n}$  همگرا می‌باشد؟

- (۱)  $a \in \mathbb{Z}$
- (۲)  $a \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
- (۳)  $a \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{2k+1}{2} \pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$
- (۴)  $a \in \mathbb{R}$

۱۰- تبدیل خطی  $D: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  با ضابطه  $D: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - x_1 \\ \vdots \\ x_n - x_1 \end{pmatrix}$  داده شده است. در این صورت نمایش ماتریس  $D$

نسبت به پایه استاندارد برابر است با:

$$\begin{matrix} \left[ \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline -1 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ -1 & & & \end{array} \right] & (1) \\ \left[ \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline -1 & & & \\ \vdots & & -I_{n-1} & \\ -1 & & & \end{array} \right] & (2) \\ \left[ \begin{array}{c|ccc} 0 & -1 & \dots & -1 \\ \hline -1 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ -1 & & & \end{array} \right] & (3) \\ \left[ \begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right] & (4) \end{matrix}$$

۱۱- فرض کنید  $A$  ماتریس  $5 \times 5$  باشد که همه درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن برابر با ۶ و مابقی درایه‌ها برابر با ۱ هستند.  $\det(A)$  کدام است؟

- (۱)  $2(\Delta^T)$
- (۲)  $2(\Delta^5)$
- (۳)  $2(\Delta^6)$
- (۴)  $2(\Delta^7)$

۱۲- فرض کنید  $V$  و  $W$  فضاهای برداری روی میدان  $F$  و  $S \subseteq V$  و  $S^\circ = \{T \in L(V, W) \mid \forall x \in S: T(x) = 0\}$  اگر  $V_1$  و  $V_2$  زیرفضاهای  $V$  باشند، آنگاه  $(V_1 + V_2)^\circ$  برابر است با:

- (۱)  $V_1^\circ \cap V_2^\circ$
- (۲)  $V_1^\circ + V_2^\circ$
- (۳)  $(V_1 \cap V_2)^\circ$
- (۴)  $\{0\}$

# پیاچدی تست: نخستین وبسایت تخصصی آزمون دکتری

۱۳- فرض کنید  $P_n(\mathbb{C})$  فضای برداری تمام چندجمله‌ای‌ها از درجه حداکثر  $n$  با ضرایب روی میدان اعداد مختلط

باشد و  $T: P_4(\mathbb{C}) \rightarrow P_4(\mathbb{C})$  با ضابطه  $T(f(x)) = 2f'(x) + \int_0^x f(t) dt$  باشد. در این صورت اگر

$a = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Im}(T))$  و  $b = \dim_{\mathbb{R}}(\ker(T))$  آنگاه:

(۱)  $b=4, a=2$

(۲)  $b=2, a=4$

(۳)  $b=3, a=3$

(۴)  $b=0, a=6$

۱۴- فرض کنید  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی باشند به طوری که  $AB = A^T + A + I$ . در این صورت کدام صحیح است؟

(۱)  $AB = I$

(۲)  $AB = BA$

(۳)  $\det(A) = \det(B) = 1$

(۴)  $AB = AB^T$

۱۵- فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی و  $H, K \leq G$ . در این صورت:

(۱)  $|\langle H, K \rangle : K| = |H : H \cap K|$

(۲)  $|G : H \cap K| = |G : H| |G : K|$

(۳)  $|H : H \cap K| \geq |\langle H, K \rangle : K|$

(۴) اگر  $G = \langle H, K \rangle$  آنگاه  $|H : H \cap K| > \frac{1}{4} |G : K|$

۱۶- فرض کنید  $G$  یک گروه بوده و برای هر  $a, b \in G$ ،  $(ab)^{10} = a^{10} b^{10}$ . در این صورت کدام مورد صحیح نیست؟

(۱) مشتق دوم  $G$  زیرگروه همانی است.

(۲)  $\{x^9 \mid x \in G\}$  زیرگروه نرمال  $G$  است.

(۳)  $\{x^{10} \mid x \in G\}$  زیرگروه نرمال  $G$  است.

(۴) مشتق  $\{x^{10} \mid x \in G\}$  در  $G$  نرمال است.

۱۷- با کدام حلقه یکرخت است؟  $\frac{Q[x]}{(x^2 - x)}$

(۱)  $Q$

(۲)  $Q \times \mathbb{Z}_7$

(۳)  $Q \times Q$

(۴)  $\frac{Q[x]}{(x^2)}$

۱۸- کدام جفت از حلقه‌های زیر، یکرخت هستند؟

(۱)  $\mathbb{R}, \mathbb{R}[x]$

(۲)  $\mathbb{R}[x], \mathbb{R}[x, y]$

(۳)  $\frac{\mathbb{Z}_7[x]}{(x^2)}, \frac{\mathbb{Z}_7[x]}{(x^2+1)}$

(۴)  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}], \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$

۱۹- فرض کنید  $A$  و  $B$  به ترتیب برابر با تعداد اعضای خودتوان و اعضای پوچ‌توان در حلقه  $\mathbb{Z}_{180}$  باشد. در این صورت حاصل  $A+B$  کدام است؟

(۱) ۱۰

(۲) ۱۴

(۳) ۱۲

(۴) ۱۶

۲۰- کدام یک از معادلات زیر در  $S_6$  دارای جواب است؟

(۱)  $a^{-1}(12)a=(34)(15)$

(۲)  $a^{-1}(123)a=(125)(34)$

(۳)  $(135)a=(34)(236)a$

(۴)  $a^{-1}(12)(34)a=(56)(13)$

۲۱- تعداد زیرگروه‌های  $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$  چند است؟

(۱) ۴

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴) ۸

توجه: در سؤالات زیر همواره مدول‌ها یکانی هستند.

۲۲-  $\mathbb{Z}$ -مدول زیر با کدامیک از  $\mathbb{Z}$ -مدول‌های زیر یکرخت است؟

$(\mathbb{Z}_4 \oplus \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}) \otimes (\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z})$

(۱)  $\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$

(۲)  $\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$

(۳)  $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$

(۴)  $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$

۲۳- فرض کنید  $R$  یک حلقه جابه‌جایی و یک‌دار باشد. اگر  $R$  حلقه آرتینی باشد، آنگاه کدام مورد صحیح نیست؟

- (۱)  $J(R)$  یک ایده‌آل پوچ‌توان است.
- (۲)  $R$  دارای فقط تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال است.
- (۳) هر ایده‌آل  $R$  یک ایده‌آل اول  $R$  است.
- (۴) هر ایده‌آل اول  $R$  یک ایده‌آل ماکسیمال  $R$  است.

۲۴- کدام یک از گروه‌های آبلی زیر غیربدیهی (نافصر) است؟

- (۱)  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$
- (۲)  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_q)$  که در آن  $p$  و  $q$  اعداد اول متمایز هستند.
- (۳)  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p^{\infty}, \mathbb{Q})$  که در آن  $p$  یک عدد اول است.
- (۴)  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p[x], \mathbb{Z}_p)$  که در آن  $p$  یک عدد اول است.

۲۵- همه مدول‌های زیر تصویری هستند، به‌جز:

- (۱) هر مدول خارج قسمتی از یک مدول آزاد
- (۲) هر مجموع مستقیم از مدول‌های تصویری
- (۳) هر جمع‌وند مستقیم از یک مدول تصویری
- (۴) هر  $\mathbb{Z}$  - مدول متناهیاً تولید شده و خالی از تاب

۲۶- تعداد عناصر رادیکال جیکوبسن حلقه  $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ \circ & d & e \\ \circ & \circ & f \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}_3 \right\}$  کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۳
- (۳) ۹
- (۴) ۲۷

۲۷- فرض کنید  $R$  یک حوزه صحیح باشد و  $F$  و  $F'$  دو  $R$  - مدول آزاد باشند. اگر  $\circ \neq x \in F$  و  $\circ \neq x' \in F'$  در این صورت کدام مورد صحیح است؟

- (۱) هر  $R$  - زیر مدول  $F \otimes_R F'$  آزاد است.
- (۲)  $F \otimes_R F'$  ممکن است آزاد نباشد.
- (۳)  $R$  - منومورفیزم ( $R$  هم‌ریختی یک‌به‌یک)  $\varphi: F \rightarrow F'$  وجود دارد.
- (۴)  $F \otimes_R F'$  در  $x \otimes x' \neq \circ$ .

۲۸- فرض کنیم  $R = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}$  و  $R' = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ . کدام عبارت در مورد حلقه‌های  $R$  و  $R'$  صحیح است؟

- (۱) حلقه‌های  $R$  و  $R'$  هر دو نه نوتری و نه آرتینی هستند.
- (۲) حلقه‌های  $R$  و  $R'$  هر دو هم نوتری و هم آرتینی هستند.
- (۳) حلقه  $R$  نه نوتری و نه آرتینی است ولی حلقه  $R'$  آرتینی است ولی نوتری نیست.
- (۴) حلقه  $R$  نه نوتری و نه آرتینی است ولی حلقه  $R'$  نوتری است ولی آرتینی نیست.

- ۲۹- همه گزاره‌های زیر در مورد حلقه  $M_p(\mathbb{R})$  صحیح‌اند، به جز:
- (۱) حداقل یک ایده‌آل چپ سره و غیرصفر دارد که ماکسیمال چپ نیست.
  - (۲) برای هر ایده‌آل چپ آن مانند  $I$  داریم  $I^2 = I$ .
  - (۳) هر ایده‌آل چپ سره و غیرصفر آن، مینیمال است.
  - (۴) هر ایده‌آل چپ و غیرصفر آن شامل یک عضو پوچ‌توان غیر صفر است.
- ۳۰- فرض کنید  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  یک دنباله دقیق از  $\mathbb{Z}$ -مدول‌ها باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟
- (۱) اگر دنباله شکافته شود آنگاه  $C$  تصویری است.
  - (۲) اگر  $B = \mathbb{Z}_p$  آنگاه دنباله شکافته می‌شود.
  - (۳) اگر  $B \cong A \oplus C$  آنگاه دنباله شکافته می‌شود.
  - (۴) اگر  $A = \mathbb{Z}$  و  $C = \mathbb{Z}_p$  آنگاه  $B \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p$ .
- ۳۱- گروه  $\mathbb{Z}_p$  را به‌عنوان مدول انژکتیو (توزیقی) روی کدام‌یک از حلقه‌های زیر می‌توان با ضرب اسکالر غیربدیهی در نظر گرفت؟
- (۱)  $\mathbb{Z}_4$
  - (۲)  $\mathbb{Z}_5$
  - (۳)  $\mathbb{Z}_6$
  - (۴)  $\mathbb{Z}_7$
- ۳۲- در مورد هر حلقه یک‌دار با حداقل ۲ عضو، کدام گزینه صحیح است؟
- (۱) زیرحلقه‌های غیر صفر دارد که آرثینی است.
  - (۲) زیرحلقه‌های غیرصفر دارد که نوتری است.
  - (۳) زیرحلقه‌های غیرصفر دارد که میدان است.
  - (۴) زیرحلقه‌های غیرصفر دارد که دامنه صحیح است.
- ۳۳- فرض کنید  $R$  یک حوزه صحیح باشد، در این صورت اگر  $F$  میدان کسرهای  $R$  باشد آنگاه با فرض نوتری بودن  $F$  به‌عنوان  $R$ -مدول کدام مورد صحیح است؟
- (۱)  $F$  انژکتیو و  $R$  غیرانژکتیو است. (به‌عنوان  $R$ -مدول)
  - (۲)  $F$  غیرانژکتیو و  $R$  انژکتیو است. (به‌عنوان  $R$ -مدول)
  - (۳) هم  $F$  و هم  $R$  انژکتیو هستند. (به‌عنوان  $R$ -مدول)
  - (۴) هر دو  $F$  و  $R$  غیرانژکتیو هستند. (به‌عنوان  $R$ -مدول)
- ۳۴- فرض کنید  $X$  یک مجموعه نامشمارا باشد. کدام خانواده سیگما - جبر نیست؟
- (۱)  $\{E \subseteq X \text{ یا } E^c \text{ متناهی است} : E \subseteq X\}$
  - (۲)  $\{E \subseteq X \text{ یا } E^c \text{ نامتناهی است} : E \subseteq X\}$
  - (۳)  $\{E \subseteq X \text{ یا } E^c \text{ حداکثر شماراست} : E \subseteq X\}$
  - (۴)  $\{E \subseteq X \text{ یا } E^c \text{ نامشماراست} : E \subseteq X\}$



۳۵- اگر  $m$  اندازه لبگ روی  $\mathbb{R}$  و  $C$  مجموعه کانتور و  $D$  مجموعه اعداد اصم در بازه  $[\frac{\pi}{4}, \pi]$  باشد، مقدار

$$\int_C \sin x \, dm(x) + \int_D \cos x \, dm(x)$$

برابر است با:

(۱) -۱

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) ۲

۳۶- در مورد زیرمجموعه‌های  $\mathbb{R}$  با اندازه لبگ، کدام گزینه درست است؟

(۱) مرز هر مجموعه ناشمارا، اندازه‌پذیر است.

(۲) هر مجموعه ناشمارا دارای زیرمجموعه‌ای با اندازه مثبت است.

(۳) هر مجموعه ناشمارا دارای زیرمجموعه‌ای اندازه‌ناپذیر است.

(۴) خانواده‌ای ناشمارا از زیرمجموعه‌های دوبه‌دو مجزا و اندازه‌پذیر با اندازه مثبت در  $[0, 1]$  وجود دارد.

۳۷- فرض کنید  $m$  اندازه لبگ بر  $\mathbb{R}$  باشد. اگر  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  تابعی باشد که  $f \circ m$  (ترکیب  $f$  و  $m$ ) یک اندازه

است، در مورد  $f$  کدام گزینه درست است؟

(۱)  $f$  صعودی است ولی لزوماً جمعی نیست.

(۲) لزوماً  $f$  تابع همانی یا تابع ثابت است.

(۳)  $f$  جمعی است ولی لزوماً پیوسته نیست.

(۴)  $f$  جمعی و پیوسته است.

۳۸-  $\mathbb{R}$  با اندازه لبگ و تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را در نظر بگیرید. کدام گزینه معادل اندازه‌پذیری  $f$  نیست؟

(۱) برای هر زیرمجموعه فشرده  $A$  از  $\mathbb{R}$ ،  $f^{-1}(A)$  اندازه‌پذیر است.

(۲) برای هر زیرمجموعه متناهی  $A$  از  $\mathbb{R}$ ،  $f^{-1}(A)$  اندازه‌پذیر است.

(۳) برای هر عدد حقیقی  $a$ ،  $f^{-1}((a, a+1))$  اندازه‌پذیر است.

(۴) برای هر تابع اندازه‌پذیر  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، مجموعه  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq g(x)\}$  اندازه‌پذیر است.

۳۹- کدام گزینه درست است؟

(۱) ترکیب دو تابع اندازه‌پذیر لبگ، اندازه‌پذیر لبگ است.

(۲) ترکیب دو تابع اندازه‌ناپذیر لبگ، اندازه‌ناپذیر لبگ است.

(۳) تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  تقریباً همه جا با تابعی پیوسته بر  $\mathbb{R}$  برابر است.

(۴) اگر  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  دارای مشتق کراندار باشد، هر مجموعه اندازه‌پذیر لبگ را به مجموعه‌ای اندازه‌پذیر لبگ تصویر می‌کند.

۴۰- بازه  $[0, 1]$  با اندازه لبگ  $m$  و مجموعه  $E = [0, \frac{1}{2}]$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $f_n(x) = \begin{cases} \chi_E(x) & \text{فرد } n \\ 1 - \chi_E(x) & \text{زوج } n \end{cases}$

دنباله  $\{f_n\}$  به‌طور نقطه‌وار همگرا ..... و دنباله عددی  $\left\{ \int_0^1 f_n dm \right\}$  همگرا .....

(۱) است، است.

(۲) نیست، است.

(۳) است، نیست.

(۴) نیست، نیست.

۴۱-  $\mathbb{R}$  با اندازه لبگ را در نظر بگیرید. فرض کنید  $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & 0 \leq x \leq 2^n \\ 0 & \text{درغیراین صورت} \end{cases}$ . درباره دنباله  $\{f_n\}$  کدام گزینه درست است؟

(۱)  $f_n \rightarrow 0$  (در نرم  $L^2$ )، اما  $f_n \not\rightarrow 0$  (در اندازه).

(۲)  $f_n \rightarrow 0$  (در نرم  $L^2$ ) و  $f_n \rightarrow 0$  (در اندازه).

(۳)  $f_n \not\rightarrow 0$  (در نرم  $L^2$ ) و  $f_n \not\rightarrow 0$  (در اندازه).

(۴)  $f_n \rightarrow 0$  (در اندازه)، اما  $f_n \not\rightarrow 0$  (در نرم  $L^2$ ).

۴۲- بازه  $[0, 1]$  با اندازه لبگ را در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟

(۱)  $L^2[0, 1] \subseteq L^3[0, 1]$  و همگرایی در نرم  $L^3$  همگرایی در نرم  $L^2$  را نتیجه می‌دهد.

(۲)  $L^2[0, 1] \subseteq L^3[0, 1]$  و همگرایی در نرم  $L^2$  همگرایی در نرم  $L^3$  را نتیجه می‌دهد.

(۳)  $L^3[0, 1] \subseteq L^2[0, 1]$  و همگرایی در نرم  $L^3$  همگرایی در نرم  $L^2$  را نتیجه می‌دهد.

(۴)  $L^3[0, 1] \subseteq L^2[0, 1]$  و همگرایی در نرم  $L^2$  همگرایی در نرم  $L^3$  را نتیجه می‌دهد.

۴۳- فرض کنید  $\{f_n\}$  دنباله‌ای از توابع حقیقی نامنفی انتگرال‌پذیر بر یک فضای اندازه  $(X, S, \mu)$  باشد و

$$a_n = \int_X f_n d\mu$$

کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر  $a_n \rightarrow 0$ ، آنگاه  $f_n \rightarrow 0$  (تقریباً همه جا).

(۲) اگر  $f_n \rightarrow 0$  (در اندازه) آنگاه  $a_n \rightarrow 0$ .

(۳) اگر  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرا باشد، آنگاه  $f_n \rightarrow 0$  (تقریباً همه جا).

(۴) اگر  $f_n \rightarrow 0$  (تقریباً همه جا)، آنگاه  $a_n \rightarrow 0$ .

۴۴- فرض کنید  $H$  یک فضای هیلبرت و  $x$  و  $y$  دو عضو متعامد ناصفر آن باشند. گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x - y\|^2 \quad (\text{الف})$$

(ب)  $x$  و  $y$  مستقل خطی هستند.

کدام گزینه درست است؟

(۱) (الف) و (ب) هر دو درست هستند.

(۲) (الف) درست است اما (ب) نادرست است.

(۳) (ب) درست است اما (الف) نادرست است.

(۴) (الف) و (ب) هیچ کدام درست نیستند.

۴۵- کدام گزینه معادل باناخ بودن فضای نرم‌دار  $X$  نیست؟

(۱)  $L(X)$ ، فضای تمام عملگرهای خطی کراندار روی  $X$  (با نرم عملگری) باناخ است.

(۲) مجموعه  $\{x \in X : \|x\| = 1\}$  با متر  $d(x, y) = \|x - y\|$  کامل است.

(۳) هر سری همگرای مطلق در  $X$  همگرا است.

(۴)  $X^*$ ، فضای دوگان  $X$ ، باناخ است.

# پیاچدی تست: نخستین وبسایت تخصصی آزمون دکتری